

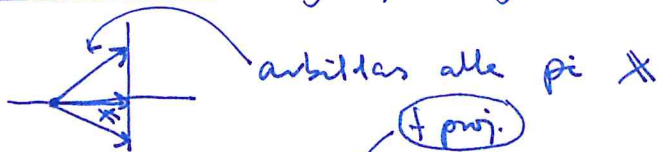
TMA660 Linjär algebra och geometri 27/8 20 lösningar (1)

1a) ∞ många lös. ty $AX=0$ alltid lösbar &
 $\# \text{parametrar i lös.} \geq \# \text{kolonner} - \# \text{rader} = 1$

b) 0 lös. ty $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 7 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 - 7R_1, R_4 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 12 & 19 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & 8 & 2 \\ 0 & 12 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 - \frac{3}{2}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_4 - R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \leftarrow \text{lösningssattnas}$

c) ∞ många lös. ty $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$

d) ∞ många lös. ty f linjär & $f(x) = 0$ om $x \perp l$



e) 1 lös ty $|f(x)| \leq |x|$ sant om $x = 0$
 $\parallel$
 $|2x| = 2|x|$

2a) FALSKT ty $f(-x) = |-x| = |x| \neq -|x|$

b) FALSKT ty 6 nollställen totalt, # idiereriska nollställen ojämnt

c) SANT ty $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 6 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_2 \cdot (-1/7)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 9/7 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3 \cdot (-1)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 9/7 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_2 \cdot 7} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_2 \cdot (-1/7)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 9/7 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_1 - 2R_2 + 3R_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9/7 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_2 \cdot 7/9} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7/9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_2 \cdot 9/7} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ hellet

d) FALSKT ty $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ Alla spårerna vektornerna upp $\mathbb{R}^4$. Endast 0 är nollvektor med dem alla.

e) SANT se Lemma 3 s 182

f) FALSKT $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ saknar lösning

g) FALSKT ty $0 = (u \times v) \cdot (v \times u) = -(u \times v) \cdot (u \times v) = -|u \times v|^2$
 $\Leftrightarrow u \times v = 0 \Leftrightarrow u \times v$ linj. ber.

h) SANT ty $(AB)^T AB = B^T A^T AB = B^T I B = B^T B = I$
 $= I$ ty A nro $= I$ ty B nro

i) SANT ty $e^z e^{\bar{z}} = e^{z+\bar{z}} = e^{2\operatorname{Re} z}$ reellt

~~j) SANT ty $(u \times v) \times w = - (v \times u) \times w = w \times (v \times u)$~~

j) SANT ty $(u \times v) \times w = - (v \times u) \times w = w \times (v \times u)$

3) Linjärt beroende om

$$x_1 \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & b \end{bmatrix} x = 0 \quad \text{endast} \\ \text{här lös.}$$

Lös: $\begin{bmatrix} a & 2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 2 & 2 & | & 0 \\ 2 & 2 & 3 & | & 0 \\ 3 & 2 & b & | & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 0 \\ 2 & 2 & 3 & | & 0 \\ a & 2 & 1 & | & 0 \\ 3 & 2 & b & | & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} -2 & -a & -3 \end{matrix} \Leftrightarrow$

byt rader

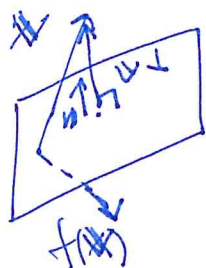
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2-2a & 1-2a & | & 0 \\ 0 & -4 & b-6 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1-a & -2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -a & | & 0 \\ 0 & 0 & b-4 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$1-2a-(1-a) = -a$$

Om $a=0$ eller $b=4$ o månge lös $\Leftrightarrow$ vektorne linj. ber.
Annars linjärt beroende.

Linjärt beroende om $a \neq 0$ eller $b \neq 4$

4)



$$\Pi = \{3x + 4y + 5z = 0\} \quad n = (3, 4, 5)$$

Minns $f(v) = \text{spegling i } \Pi =$

$$v - 2v^\perp \quad \leftarrow \text{ortogonalt proj an } v \text{ på } \Pi$$

$$v - 2 \frac{v \cdot n}{|n|^2} n \quad \text{Obs } |n|^2 = n \cdot n = 3^2 + 4^2 + 5^2 = 50$$

Minns avbildningsmatris: $A_f = \begin{bmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{bmatrix}$

Nu $f(e_1) = (1, 0, 0) - 2 \frac{(1, 0, 0) \cdot (3, 4, 5)}{50} (3, 4, 5) =$

$$\frac{1}{50} ((50, 0, 0) - 2 \cdot 3 \cdot (3, 4, 5)) = \frac{1}{50} (32, -24, -30)$$

$$f(e_2) = (0, 1, 0) - 2 \frac{(0, 1, 0) \cdot (3, 4, 5)}{50} (3, 4, 5) = \dots = \frac{1}{50} (-24, 18, -40)$$

$$f(e_3) = (0, 0, 1) - 2 \frac{(0, 0, 1) \cdot (3, 4, 5)}{50} (3, 4, 5) = \dots = \frac{1}{50} (-30, -40, 0)$$

Aulbi är avbildningsmatrisen

$$A_f = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 32 & -24 & -30 \\ -24 & 18 & -40 \\ -30 & -40 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 16 & -12 & -15 \\ -12 & 9 & -20 \\ -15 & -20 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Obs $f \circ f = \text{id}$ ty f spegling

Aulbi $A_{f \circ f} = I$

Vi låter $f \circ f \circ f = f$

Aulbi $A_{f \circ f \circ f} = A_f = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 16 & -12 & -15 \\ -12 & 9 & -20 \\ -15 & -20 & 0 \end{pmatrix}$

5) Obs $A = 0$ uppfyller $A^2 - A = 0$, dvs A kan vara 0-matrisen $\Rightarrow \det A = 0$.

Antag $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ inverterbar.

Di $0 = A^2 - A \xrightarrow{\text{mult med } A^{-1}} 0 = A^{-1}(A^2 - A) = A - I \Leftrightarrow A = I \Rightarrow \det A = 1.$

Aulbi $\det A = 0$ eller $\det A = 1$.