2. Låt V vara mängden av alla positiva reella tal försedd med operationerna

$$\begin{aligned} a \oplus b &= ab \\ \alpha \odot a &= a^{\alpha} \end{aligned}$$

Visa att V med dessa operationer är ett vektorrum.

3. Låt V vara mängden $\mathbb{R}^2$ försedd med operationerna

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) &= (x_1 + y_1 + 1,\ x_2 + y_2 + 1) \\ \alpha \odot (x_1, x_2) &= (\alpha + \alpha x_1 - 1,\ \alpha + \alpha x_2 - 1). \end{aligned}$$

Visa att V med dessa operationer är ett vektorrum. Vad blir nollelementet?

4. Betrakta de delmängder av $\mathcal{P}_n$ som består av alla polynom $p(t)$ av grad $\leq n$ sådana att

a) $2p(0) = p(1)$
b) $p(t) \geq 0$ då $0 \leq t \leq 1$
c) $p(t) = p(1-t)$ för alla t.

Vilka av dessa delmängder är underrum i $\mathcal{P}_n$?

6. Avgör om M är ett underrum av V, då

a) $V = C(\mathbb{R})$, $M = \{f \in V : f(-x) = f(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}\}$.
b) $V = M_{n \times n}$, $M =$ mängden av alla uppåt triangulära $n \times n$-matriser.
c) $V = C[0,1]$, $M = \{f \in V : f(0) = 1\}$.
d) $V = C[0,1]$, $M = \{f \in V : f(1) = 0\}$.
e) $V = M_{n \times n}$, $M =$ mängden av alla matriser $A \in V$ som kommuterar med en given matris $B \in V$.
f) $V = M_{n \times n}$, $M = \{A \in V : \operatorname{sp} A = 0\}$, ($\operatorname{sp} A =$ spåret för $A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$).

20. a) Vad är dimensionen av det linjära rummet $M_{n \times n}$ av alla $n \times n$ matriser?
b) Vad är dimensionen av underrummet av symmetriska matriser i $M_{n \times n}$?
c) Visa att de skevsymmetriska matriserna, dvs de som uppfyller $A^t = -A$, bildar ett underrum i $M_{n \times n}$. Vad är dimensionen av detta underrum?

21. Låt $C(\mathbb{R})$ vara vektorrummet av alla kontinuerliga funktioner över $\mathbb{R}$. Visa att $C(\mathbb{R})$ är oändligdimensionellt.

22. Visa att följande funktioner är linjärt beroende

a) $\sin 2t, \cos 2t, \sin^2 t, \cos^2 t$
b) $\ln(t^6+1), \ln(t^4-t^2+1), \ln(t^2+1)$
c) $\sin(t+\alpha)$, $\sin(t+\beta)$, $\sin(t+\gamma)$ för godtyckliga $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

23. Visa att följande funktioner är linjärt oberoende

a) e^t, e^{t^2}, e^{t^3}
b) $\sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t$.

51. För vilka värden på a är vektorerna $(a,1,1)$ och $(a,1,a)$ ortogonala med avseende på skalärprodukten $x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$ i $\mathbb{R}^3$?

53. Är någon av följande två kandidater en skalärprodukt på $C^1[a,b]$:

$$\begin{aligned} < f, g > &= \int_a^b f'(t)g'(t)dt \\ < f, g > &= \int_a^b f'(t)g'(t)dt + f(a)g(a)? \end{aligned}$$

(f' betecknar derivatan av f.)

55. Låt $\|u\| > \|v\|$. Visa att u och $u - v$ inte är ortogonala.

96. Sätt

$$F(u) = \frac{d^2u}{dt^2} - 2t\frac{du}{dt}.$$

a) Visa att F är en linjär avbildning på $\mathcal{P}_n$.

b) Bestäm matrisen för F på $\mathcal{P}_3$ i basen $1, t, t^2, t^3$.

97. Låt M vara vektorrummet av alla 2×2 matriser. Definiera operatorn $T : M \to M$ genom

$$T(X) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X + X \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Visa att T är linjär.

b) Bestäm nollrummet $N(T)$ och dess dimension.

130. Låt $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ vara en avbildning definierad genom

$$T(p(x)) = xp'(x+1) + p(x) \quad \text{för alla} \quad p \in \mathcal{P}_2.$$

a) Visa att T är linjär.

b) Bestäm matrisen för T i basen $\{1, x, x^2\}$.

c) Ange alla egenvärden och egenvektorer till T.

Svar

3. $(-1, -1)$

4. a) och c)

6. c) nej, övriga ja

20. a) n^2 b) $\frac{n(n+1)}{2}$ c) $\frac{n(n-1)}{2}$

51. $a = -1$, eller -2

53. ja, den andra

96. b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$

97. b) $N(T) = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ -a & 0 \end{bmatrix} ; a \in \mathbb{R} \right\}$, $\dim N(T) = 1$

130. b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

c) $\lambda_1 = 1, \quad p_1 = 1$
$\lambda_2 = 2, \quad p_2 = x$
$\lambda_3 = 3, \quad p_3 = 2x + x^2$