1a)
$$\begin{vmatrix}4&3&2&1\\5&4&3&2\\4&-3&2&1\\8&5&4&3\end{vmatrix} \begin{matrix}-2 & -1 & -3\end{matrix} = \begin{vmatrix}4&3&2&1\\-3&-2&-1&0\\0&-6&0&0\\-4&-4&-2&0\end{vmatrix} = (-1)\cdot(-6)\cdot(-2)\begin{vmatrix}4&3&2&1\\3&2&1&0\\0&1&0&0\\2&2&1&0\end{vmatrix} =$$

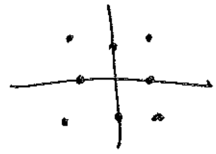
$$-12\,(-1)^{(4+1)}\cdot 1\begin{vmatrix}3&2&1\\0&1&0\\2&2&1\end{vmatrix} = 12\cdot(-1)^{2+2}\cdot 1\begin{vmatrix}3&1\\2&1\end{vmatrix} = 12\,(3-2) = \underline{\underline{12}}$$

utv. kolonn 4

utv. rad 2

b) Låt b = HL & A = koeff. i ekv. systemet.
Obs b = tredje kolonnen i A. Alltså uppfyller $X=(0,0,1,0)$ ekv. $AX=b$. Enligt uppg a) är det $A \neq 0$. Alltså har $AX=b$ entydig lösning. Alltså är lösn. till ekv. systemet $\underline{\underline{X=(0,0,1,0)}}$

2a) Obs $p(z)=(z^4+16)(z^4-1)$ (sätt t.ex. $z^4=t$)
Vidare $(z^4-1)=(z^2-1)(z^2+1)=(z-1)(z+1)(z+i)(z-i)$
Betrakta ekv $z^4+16=0 \iff z^4=-16$ (*) Ansätt $z=re^{i\theta}$ $r>0$
Då (*) $\iff r^4e^{i4\theta}=16e^{i\pi} \iff \begin{cases} r^4=16 \\ 4\theta=\pi+2\pi k & k\in\mathbb{Z}\end{cases} \iff \begin{cases} r=2 \\ \theta=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k & k\in\mathbb{Z}\end{cases}$
$\iff z=2e^{i(\pi/4+k\pi/2)}$ $k\in\mathbb{Z}$. Obs $k=0,1,2,3$ ger olika lösn.
$k=0$: $z=2e^{i\pi/4}=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$
$k=1$: $z=2e^{i3\pi/4}=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$
$k=2$: $z=2e^{i5\pi/4}=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$
$k=3$: $z=2e^{i7\pi/4}=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$



nollställen till p

Alltså $\underline{\underline{p(z)=(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)(z-(\sqrt{2}+\sqrt{2}i))(z-(-\sqrt{2}+\sqrt{2}i))(z+\sqrt{2}+\sqrt{2}i)(z-\sqrt{2}+\sqrt{2}i)}}$

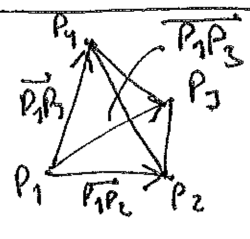
b) Minns $(z-\alpha)(z-\bar\alpha)=(z^2-2\mathrm{Re}\,\alpha\cdot z+\alpha\bar\alpha)$
Spec $(z-i)(z+i)=z^2+1$
$(z-(\sqrt{2}+\sqrt{2}i))(z-(\sqrt{2}-\sqrt{2}i))=z^2-2\sqrt{2}z+4$
$(z+\sqrt{2}+\sqrt{2}i)(z+\sqrt{2}-\sqrt{2}i)=z^2+2\sqrt{2}z+4$
Alltså $\underline{\underline{p(z)=(z^2+2\sqrt{2}z+4)(z^2-2\sqrt{2}z+4)(z-1)(z+1)(z^2+1)}}$

d) $\underline{2}$ reella nollställen (± 1)

c) $\underline{8}$ komplexa nollställen (ty grad 8)

---

3 a) Minns $\mathrm{vol}(T)=\left|\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{P_1P_2}\ \overrightarrow{P_1P_3}\ \overrightarrow{P_1P_4}\right|\right|$



Här $\overrightarrow{P_1P_2}=(2,1,0)-(1,0,0)=(1,1,0)$

$\overrightarrow{P_1P_3} = (3,2,1)-(1,0,0) = (2,2,1)$ $\quad \overrightarrow{P_1P_4} = (1,2,1)-(1,0,0) = (0,2,1)$

Alltså $\left| \overrightarrow{P_1P_2}\ \ \overrightarrow{P_1P_3}\ \ \overrightarrow{P_1P_4} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2+0+0-2-2-0 = -2.$

Alltså $\mathrm{vol}(T) = \frac{1}{6}|-2| = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

b) Låt $f(P_j) = Q_j$. Då gäller att $f\overrightarrow{P_iP_j} = A\overrightarrow{P_iP_j} = \overrightarrow{Q_iQ_j}$ och alltså

$$A \underbrace{\left[\overrightarrow{P_1P_2}\ \ \overrightarrow{P_1P_3}\ \ \overrightarrow{P_1P_4} \right]}_{=:P} = \underbrace{\left[\overrightarrow{Q_1Q_2}\ \ \overrightarrow{Q_1Q_3}\ \ \overrightarrow{Q_1Q_4} \right]}_{=:Q}$$

Speciellt gäller att $\det A \cdot \det P = \det Q$

Nu: $\overrightarrow{Q_1Q_2} = (2,1,6)-(1,2,3) = (1,-1,3)$ $\quad \overrightarrow{Q_1Q_3} = (1,4,3)-(1,2,3) = (0,2,0)$

$\overrightarrow{Q_1Q_4} = (-1,0,-3)-(1,2,3) = (-2,-2,-6)$

Alltså $\det Q = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -12+0+0-0-0+12 = -12+12 = 0$

Såg man att $\det P = -2 \neq 0$ Alltså $\det A = \det Q / \det P = 0/(-2) = \underline{\underline{0}}$

---

4) a) Låt $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Då $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ och alltså $A^3 = 0$.

<u>Slutsats $A^3 = 0$ implicerar ej att $A = 0$.</u>

b) Antag $A^3 = 0$. Då $0 = \det A^3 = (\det A)^3 \Rightarrow \det A = 0$. Alltså $\operatorname{rang} A \leq 1$

Antag <u>$\operatorname{rang} A = 0$</u>. Då $A = 0 \Rightarrow A^2 = 0$.

Antag <u>$\operatorname{rang} A = 1$</u>. Då Kolonn $A = \operatorname{span}\{v\}$ där $v \neq 0$.

Speciellt gäller $Av = \lambda v$ för något $\lambda \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow A^3 v = \lambda^3 v$.

Eftersom $A^3 = 0$ måste $\lambda^3 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$, dvs $Av = 0$.

Tag godt. vektor $u \in \mathbb{R}^2$. Då $Au = \mu v$ för något $\mu \in \mathbb{R}$, och det följer att $A^2 u = A(\mu v) = \mu A v = \mu 0 = 0$. Alltså $A^2 = 0$ (ty u godt.)

<u>Slutsats</u>: $A^3 = 0 \Rightarrow A^2 = 0$

---

5)

$$\det A = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 & \cdots & x^{n-1} & 1 & x \\ x^3 & x^4 & \cdots & 1 & x & x^2 \\ x^4 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ x^{n-1} & & & & & x^{n-1} \\ \overset{1}{x^n} & \overset{x}{x^2} & \cdots & & x^{n-1} & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -x \\ \downarrow -x \\ \downarrow \\ \vdots \\ -x \\ \downarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 & \cdots & x^{n-1} & 1 & x \\ 0 & 0 & \cdots & 1-x^n & 0 & 0 \\ \vdots & & 1-x^n & & & \vdots \\ \vdots & \iddots & & & & \vdots \\ 1-x^n & & & & & 0 \\ 0 & \cdots & & & 0 & 1-x^n \end{vmatrix} \overset{\text{utv. kolonn}}{=}$$

För $i > 0$ $a_{ij} = \begin{cases} 1-x^n & \text{om } i+j = n \text{ eller } 2n \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

TMA 660 26/10 19

$$= (-1)^{n-1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1-x^n & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \\ 1-x^n & & & & \\ 0 & & & & 1-x^n \end{vmatrix} = (-1)(1-x^n)^{n-1} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \\ 1 & & & & \\ 0 & & & & 1 \end{vmatrix} =$$

utv rad n-1

$$- (x^n-1)^{n-1} \underbrace{(-1)^{(n-1)+(n-1)} \cdot 1}_{=1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & & 0 & 1 \\ & & & 0 \\ 0 & & & \\ 1 & 0 & & 0 \end{vmatrix}$$

Låt $D_m = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ 1 & 0 & & 0 \end{vmatrix}$ Då $D_m = \pm \begin{vmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \pm 1$

$m \times m$

1 på diagonalen, 0 annars [byt plats rad 1 & m, rad 2 & m-1 etc...]

Om $m = 2k$ gör k "byten" $\Rightarrow D_m = (-1)^k$

$m = 2k+1$ —"— $\Rightarrow D_m = (-1)^k$ Ulankt att $D_{n-2} = -D_n$

Det följer nu att $\det A = -D_{n-2}(x^n-1)^{n-1} = D_n(x^n-1)^{n-1}$

Obs: $5 = 2\cdot 2+1 \Rightarrow D_5 = (-1)^2 = 1 \Rightarrow$ a) $\det A = (x^5-1)^4$

$50 = 2\cdot 25 \Rightarrow D_{50} = (-1)^{25} = -1 \Rightarrow$ b) $\det A = -(x^{50}-1)^{49}$

$500 = 2\cdot 250 \Rightarrow D_{500} = (-1)^{250} = 1 \Rightarrow$ c) $\det A = (x^{500}-1)^{499}$

6a) FALSKT, t.ex rang $A = 3$ rang $B = 2$

b) SANT ty $0 \neq u \times v \perp u, v$, Alltså $u, v, u\times v$ linj obero. $\Rightarrow$ spänner upp $\mathbb{R}^3$

c) FALSKT Spegling linjär avb. omm linjen går genom origo

d) FALSKT Planen har olika normalriktning $\Rightarrow$ De skär varandra.

e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ finnes lösningar $\Rightarrow$ SANT

f) FALSKT Tag t.ex $A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ då $r = p = 1$ men $AB = 0$ m rang 0

g) SANT, ty $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

---

7) Se Sparr kap 2 + ant på hemsidan

8a) Se Sparr kap 7

b) —"— —"— 5