

TMA660 Linjär algebra och geometri F/TM

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.

Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, 5: 40 (max 50 p).

Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

1. (a) Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 & 4 \end{bmatrix}$.

Bestäm en bas för nollrummet till A , en bas för kolonnrummet till A , rangen av A och nulldimensionen av A .

(b) Beräkna determinanterna $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 & 4 \end{vmatrix}$ och $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 8 & 4 \end{vmatrix}$. (8 p)

2. Låt $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ vara avbildningen $(x, y) \mapsto x + yi$ och, givet $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, låt $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara avbildningen $f \circ g$. Avgör om F är en linjär avbildning om

(a) $f : z \mapsto \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z$,

(b) $f : z \mapsto |z|$. (6 p)

3. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 poäng. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Den totala poängen är dock ≥ 0 . (6 p)

(a) För alla $(m \times n)$ -matriser A sådana att $m \leq n$ gäller att $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösbart för alla $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

(b) Matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ är inverterbar.

(c) För alla matriser A, B så att produkterna AB och BA är väldefinierade gäller att $AB = BA$.

(d) Antag att $\mathbf{u}$ är parallell med $(1, 2, 3)$ och ortogonal mot $(1, 2, 3)$. Då är $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

(e) Låt $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara ortogonal projektion på linjen $\ell : t(1, 1, 1), t \in \mathbb{R}$, och låt A vara dess avbildningsmatris. Då är rangen av A mindre än nulldimensionen av A .

(f) För alla vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ i rummet gäller att

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \bullet (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = 0.$$

4. Låt P vara en fyrhörning i planet med area 1 och låt Q vara den fyrhörning vars hörn är mittpunkterna på sidorna i P . Är det utifrån den givna informationen möjligt att bestämma arean av Q ? Om svaret är ja, bestäm arean av Q . Annars ange ett motexempel. (6 p)

5. Låt ℓ_1 vara skärningslinjen mellan planen $\Pi_1 = \{x + y + z = 1\}$ och $\Pi_2 = \{x + 2y + 3z = 4\}$ och låt ℓ_2 vara linjen $\ell_2 : (0, 1, -4) + t(1, 2, 1), t \in \mathbb{R}$. Bestäm avståndet mellan ℓ_1 och ℓ_2 . (7 p)

6. Låt A vara $(n \times n)$ -matrisen med matriselement $a_{ij} = \begin{cases} 1 + x & \text{om } i = j \\ 1 & \text{om } i \neq j \end{cases}$.
Beräkna determinanten av A . (5 p)

7. Visa att ekvationen

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_s \mathbf{v}_s = \mathbf{0}$$

har en icke trivial lösning (d v s en annan lösning än den triviala lösningen $\lambda_1 = \cdots = \lambda_s = 0$) om och endast om någon av vektorerna $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$ är en linjärkombination av de andra. (6 p)

8. (a) Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara geometriska vektorer i rummet. Definiera vektorprodukten $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.
(b) Låt $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ vara en högerorienterad ON-bas i rummet. Visa att $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$,
 $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1$.
(c) Låt (u_1, u_2, u_3) och (v_1, v_2, v_3) vara koordinaterna för $\mathbf{u}$ respektive $\mathbf{v}$ i den högerorienterade ON-basen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Härled ett uttryck för $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ i $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. (6 p)

Lycka till!
Elizabeth