TMA660 Linjär algebra & geometri 24/10 2020 lösningar (1)

1) Låt A = ekv. syst. koeffmatris.

Då $\det A = \begin{vmatrix} a & a & a \\ b & a & a \\ b & b & 2a \end{vmatrix} = 2a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - 2a^2b - a^2b = 2a^3 - 3a^2b + ab^2 = a(2a^2 - 3ab + b^2) = a(b-a)(b-2a)$

Obs $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ inverbar $\Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ entydig lösn. $\forall \mathbf{b}$

Undersök vad som händer när $\det A = 0$:

$a=0$: Första raden i ekv. syst. $0 = 3 \Rightarrow$ lösn. saknas

$b-a=0 \Leftrightarrow b=a \Leftrightarrow$ de 2 första ekv. blir

$\begin{cases} a(x+y+z) = 3 \\ a(x+y+z) = 4 \end{cases}$ ej lösbara samtidigt $\Rightarrow$ lösn saknas

$b-2a=0 \Leftrightarrow b=2a$ ger:

$\begin{cases} a(x+y+z) = 3 \\ a(2x+y+z) = 4 \\ 2a(x+y+z) = 6 \end{cases}$

Obs om $a \neq 0$ så $x=y=z=1$ är en lösning. Då alla lösn = denna + Nollrum(A) $\Rightarrow \infty$ många lösn.

Slutsats: Om
- $a=0$ eller $b=a$ så 0 lösningar
- $b=2a \neq 0$ så ∞ många lösn.
- $a \neq 0, b \neq a, b \neq 2a$ 1 lösn.

---

2) Obs: H måste vara på formen $H = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$

H högerinvers till B:

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ a+e & b+f \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} c=1 & d=0 \\ e=-a & f=1-b \end{matrix}$

Sätt in i H

H högerinvers till A:

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \\ -a & 1-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+3-4a & 2b+4(1-b) \\ 3a+2-5a & 3b+5(1-b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-2a & 4-2b \\ 2-2a & 5-2b \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

TMA660 27/10 20 ②

2 forts) $\begin{cases} 3-2a=1 \\ 2-2a=0 \\ 4-2b=0 \\ 5-2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$

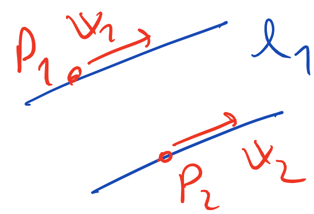
Slutsats:

$H=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ är en högerinv. till A och B.

---

3) $l_1: (0,3,-6)+s(1,-1,2) = P_1 + s v_1$

$l_2: (3,4,-5)+t(2,-2,4) = P_2 + t v_2$



Obs: l_1 & l_2 parallella ty $v_1 // v_2$

och sammanfaller ej (inses t.ex då $P_2 \notin l_1$)

Alltså finns entydigt bestämt plan Π som innehåller l_1 & l_2.

Hitta normalvektor till Π! Strategi: tag $P_1 \in l_1$, $P_2 \in l_2$.

Då $\overrightarrow{P_1P_2}$ parallell m Π, ej parallell med v_1.

Alltså $\overrightarrow{P_1P_2} \times v_1 \perp \Pi$.

Välj P_1, P_2 som ovan. Då $\overrightarrow{P_1P_2}=(3,4,-5)-(0,3,-6)=(3,1,1)$

Nu $P_1P_2 \times v_1 = (3,1,1)\times(1,-1,2) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (3,-5,-4)$ normalvektor

Alltså Πs ekv. är på formen $3x-5y-4z=d$.

Bestäm d: Sätt in punkt i planet, t ex P_1:

$$3\cdot 0-5\cdot 3-4\cdot(-6)=d \Leftrightarrow d=9$$

Slutsats: Planet $\Pi=\{3x-5y-4z=9\}$ innehåller l_1 & l_2

---

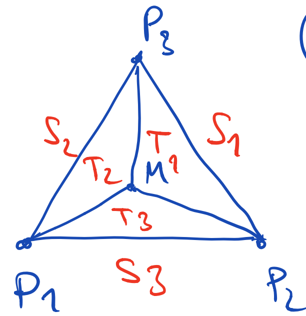
4) Obs F inverterbar (med invers $F^{-1}: z \mapsto z/(7+3i)$)

Alltså f inverterbar $\Leftrightarrow$ A inverterbar $\Leftrightarrow$

$\mathrm{Nul}(A)=\{0\}$ & $\mathrm{Kolonn}(A)=\mathbb{R}^2$

TMA 24/10 20 ③

5) Låt $P_1=(1,5)$, $P_2=(2,-3)$, $P_3=(-6,7)$ och inför beteckningar för sidor och "deltrianglar" →



Obs $2\,\text{area}(T_3) = \left\| \overrightarrow{P_1P_2} \;\; \overrightarrow{P_1M} \right\| = \left\| \overrightarrow{P_1P_2} \;\; \frac{1}{3}(\overrightarrow{P_1P_2}+\overrightarrow{P_1P_3}) \right\|$

Minns $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3})$
Välj $O=P_1$

Det linjära & alternerande i kolonner

$= \frac{1}{3} \left\| \overrightarrow{P_1P_2} \;\; \overrightarrow{P_1P_3} \right\| = \frac{1}{3} \cdot 2\,\text{area}(T)$

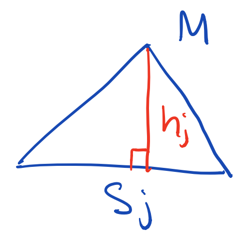
Med samma argument / av symmetriskäl

$$\text{area}(T_j) = \frac{1}{3}\,\text{area}(T) \qquad \forall j$$

Har också

$$\text{area}(T_j) = \frac{1}{2}\,\text{längd}(S_j)\cdot h_j$$

där $h_j = \text{avstånd}(M, S_j)$



Alltså
$$h_j = 2\frac{\text{area}(T_j)}{\text{längd}(S_j)} = \frac{2}{3}\frac{\text{area}(T)}{\text{längd}(S_j)}$$

Nu:

$\overrightarrow{P_1P_2} = (2,-3)-(1,5) = (1,-8) \Rightarrow \text{längd}(S_3) = |\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{1+64} = \sqrt{65}$

$\overrightarrow{P_1P_3} = (-6,7)-(1,5) = (-7,2) \Rightarrow \text{längd}(S_2) = |\overrightarrow{P_1P_3}| = \sqrt{49+4} = \sqrt{53}$

$\overrightarrow{P_2P_3} = (-6,7)-(2,-3) = (-8,10) \Rightarrow \text{längd}(S_1) = |\overrightarrow{P_2P_3}| = \sqrt{64+100} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41}$

$\text{area}(T) = \frac{1}{2}\left\| \overrightarrow{P_1P_2} \;\; \overrightarrow{P_1P_3} \right\| = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} 1 & -7 \\ -8 & 2 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}|2-56| = 27$

Obs S_1 längst. Alltså avståndet h_1 från S_1 till M minst.

Slutsats: Kortaste avst. $h_1 = \frac{2}{3}\frac{\text{area}(T)}{\text{längd}(S_1)} = \frac{2}{3}\frac{27}{2\sqrt{41}} = \frac{9}{\sqrt{41}}$

TMA 660 24/10 20

6a) SANT ty $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

b) FALSKT $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$ alltid lösbar

c) FALSKT $2\sqrt{2}$ = avstånd mellan $P_1 = (1,3)$ & $P_2 = (3,1)$
men $\overrightarrow{P_1P_2}$ ej vinkelrät mot l_1 & l_2

d) FALSKT $(A+B)(\mathbf{x}'+\mathbf{x}'') = \underbrace{A\mathbf{x}'}_{=\mathbf{0}} + A\mathbf{x}'' + B\mathbf{x}' + \underbrace{B\mathbf{x}''}_{=\mathbf{b}} \neq \mathbf{b}$
i allmänhet

e) SANT ty $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{u} = 0 = (\mathbf{v}\times\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}$
eftersom $\mathbf{u}$ & $\mathbf{v} \perp \mathbf{u}\times\mathbf{v} = -\mathbf{v}\times\mathbf{u}$

f) SANT kolonnerna ej parallella $\Rightarrow$ rang ≥ 2

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \overset{-1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ rang < 3

Alltså rang $A = 2 \Leftrightarrow$ nolldim $A = 1$

---

7) Se kapitel 8 Sparr

8) Se kapitel 2 & 5 Sparr
