

TMA660 Linjär algebra och geometri F/TM

Motivera noga alla svar på uppgifterna! Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.

Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, 5: 40 (max 50 p).

Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

1. Avgör för alla värden på $c \in \mathbb{R}$ rangen på $A = \begin{bmatrix} 2c-1 & c+1 & 3+c \\ c & 2 & c \\ 1-c & 1-c & c-4 \end{bmatrix}$. (6 p)

2. Betrakta vektorerna $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$ och $\mathbf{v} = (3, 2, 1)$ i $\mathbb{R}^3$. Lös nedanstående ekvationer och beskriv lösningarna geometriskt.

(a) $\mathbf{u} \bullet \mathbf{x} = \mathbf{v} \bullet \mathbf{x}$

(b) $\mathbf{u} \times \mathbf{x} = \mathbf{v} \times \mathbf{x}$

(c) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \bullet \mathbf{x} = 0$

(6 p)

3. Betrakta linjerna $\ell_1 : (1, 2, 3) + s(4, 5, 6), s \in \mathbb{R}$, och $\ell_2 : (0, 1, 2) + t(4, 8, 16), t \in \mathbb{R}$, i rummet. Avgör om det finns ett plan som innehåller ℓ_1 och ℓ_2 . Bestäm i så fall ekvationen för planet. (6 p)

4. Lös ekvationen

$$(1 - 3i)z^3 - (12 + 4i)z^2 + (5 + 25i)z = 0.$$

(6 p)

5. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 poäng. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Utelämnat svar ger 0 poäng. Den totala poängen är dock ≥ 0 . (6 p)

(a) Antag att A är en (5×5) -matris vars determinant är 5. Då är $(1/5)\text{adj}A$ invers till A .

(b) Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara vektorer i $\mathbb{R}^3$ och låt $\mathbf{w}$ vara en linjärkombination av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Då gäller att $\mathbf{u} \times \mathbf{w} = \mathbf{0}$.

(c) Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara spegling i linjen $\ell : (0, 1) + t(2, 3), t \in \mathbb{R}$. Då är f en linjär avbildning.

(d) Avståndet mellan linjerna $\ell_1 : (1, 3) + s(1, 1), s \in \mathbb{R}$, och $\ell_2 : (3, 1) + t(1, 1), t \in \mathbb{R}$, är $2\sqrt{2}$.

(e) Låt $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$. Då är $\mathbf{x} = [2]$ en minsta kvadratlösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(f) För alla $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ gäller att $|\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$.

6. Låt T vara tetraedern med hörn $P_1 = (-1, -1, -1)$, $P_2 = (1, 0, 0)$, $P_3 = (0, 1, 0)$ och $P_4 = (0, 0, 1)$. Vidare låt $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som avbildar P_1 på P_2 , P_2 på P_3 och P_3 på P_4 .
- (a) Bestäm volymen av T .
Tips: Använd att volymen av en kon (speciellt en tetraeder) med basarea B och höjd h är $\frac{1}{3} \cdot B \cdot h$.
- (b) Bestäm avbildningsmatrisen för f .
- (c) Vilka punkter i $\mathbb{R}^3$ avbildas på sig själva, d v s vilka $\mathbf{x}$ uppfyller att $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$?
- (d) Beskriv bilden $f(T)$ av T under f . Vad är volymen av $f(T)$? (8 p)
7. Antag att $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_3$ är linjärt beroende vektorer i $\mathbb{R}^3$. Visa att $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_3$ är linjärt beroende. (6 p)
8. Fixera $w \in \mathbb{C}$. Låt $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ vara avbildningen $(x, y) \mapsto x + yi$, låt $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ vara avbildningen $z \mapsto w \cdot z$ och låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara avbildningen $f = g^{-1} \circ F \circ g$. Visa att f är en linjär avbildning. (6 p)

Lycka till!
Elizabeth