

TMA660 Linjär algebra och geometri F/TM

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.

Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, (max 40). För betyg 5 krävs betyg 4 på den skriftliga tentamen och en godkänd muntlig examen.

Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

1. Hur många lösningar har ekvationerna

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 7 & 4 & 5 & 6 \\ 11 & 0 & 8 & 9 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 7 & 4 & 5 \\ -2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(d) $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, där $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ är ortogonal projektion på linjen $\ell: t(1,0), t \in \mathbb{R}$?

(e) $f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}$, där $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ är ortogonal projektion på linjen $\ell: t(1,0), t \in \mathbb{R}$? (10 p)

2. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 poäng. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Den totala poängen är dock ≥ 0 . (10 p)

(a) Avbildningen $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \mathbf{x} \mapsto |\mathbf{x}|$ är linjär.

(b) Polynomet $p(z) = z^6 + 2z^5 + 3z^4 + 4z^3 + 5z^2 + 6z + 7$ har exakt 3 reella nollställen.

(c) Determinanten av $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 6 \\ 0 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ är delbar med 3.

(d) Det finns oändligt många vektorer som är ortogonala mot $(1, 2, 3, 4)$, $(0, 1, 2, 3)$, $(0, 0, 1, 2)$ och $(0, 0, 0, 1)$.

(e) Om det finns en matris V så att $VA = I$ (V är en vänsterinvers till A), så har $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ endast den triviala lösningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(f) Matrisen $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ har en högerinvers.

(g) För alla vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i rummet gäller att $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) = 0$.

(h) Antag att A och B är ortogonala matriser. Då är AB en ortogonal matris.

(i) För alla komplexa tal z gäller att $e^z e^{\bar{z}}$ är ett reellt tal.

(j) För alla vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ i rummet gäller att $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{w} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{u})$.

3. För vilka val av reella tal a och b är vektorerna $(a, 1, 2, 3)$, $(2, 2, 2, 2)$ och $(1, 2, 3, b)$ linjärt oberoende? (6 p)

4. Låt $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara spegling i planet $\Pi = \{3x + 4y + 5z = 0\}$.

(a) Bestäm avbildningsmatrisen för f .

(b) Bestäm avbildningsmatriserna för $f^2 = f \circ f$ och $f^3 = f \circ f \circ f$. (10 p)

5. Antag att A är en kvadratisk matris som uppfyller

$$A^2 - A = \mathbf{0}.$$

Vilka värden kan determinanten av A anta? (4 p)

Lycka till!

Elizabeth