TMA 660 Linjär algebra & geometri 4/1 2021 Lösningar ①

1a) Undersök

$$\begin{vmatrix} | & & | \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_4 \\ | & & | \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 5 \\ -4 & 2 & -3 & -4 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

mult rad 2 & 3 m -1 ⇝ enklare form

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & -6 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -6 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

-1

utveckla längs rad 3

utv. längs kolonn 3

$$1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Alltså $\underline{\underline{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4 \text{ linjärt beroende}}}$

b) Undersök om

$$\mathbf{v}_1 = x_1 \mathbf{v}_2 + x_2 \mathbf{v}_3 + x_3 \mathbf{v}_4 \quad \text{för några } x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

dvs lös ekv. systemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

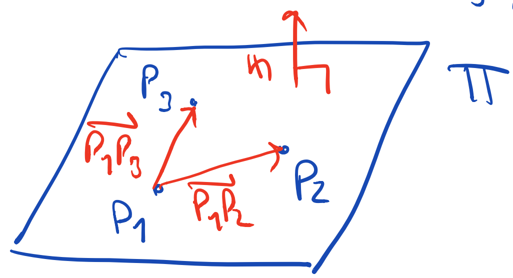
-2 1 -3

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & -3 & -4 & -4 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -7 & -14 & -12 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -7 & -14 & -11 \end{array}\right]$$

ej lösbara samtidigt

Lösning saknas (ty ekv. 2 & 4 ej lösbara samtidigt)! $\underline{\underline{\text{Alltså } \mathbf{v}_1 \text{ ej linj. komb av } \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4}}$

2) **Strategi:** Bestäm ett plan Π som innehåller P_1, P_2, P_3. Kolla om P_4 ligger i Π.



Bestäm normalvektorn till Π

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (3,5,2) - (0,2,-1) = (3,3,3) = 3(1,1,1)$$

$$\overrightarrow{P_1P_3} = (4,1,0) - (0,2,-1) = (4,-1,1)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = 3\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3(2,3,-5)$$

Alltså $(2,3,-5)$ normalvektor till Π.

Alltså är Π på formen $\Pi = \{2x + 3y - 5z = d\}$

Bestäm d: Sätt in P_1: $2\cdot 0 + 3\cdot 2 - 5\cdot(-1) = 11$

Alltså $\Pi = \{2x + 3y - 5z = 11\}$.

Kolla om $P_4 \in \Pi$: $2\cdot 5 + 3\cdot 2 - 5\cdot 1 = 11$. Alltså $P_4 \in \Pi$.

<u>Slutsats: $\Pi = \{2x+3y-5z=11\}$ innehåller $P_1, \dots, P_4$</u>

---

3 a) <u>Obs</u>

$$f : [t] \mapsto t\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}[t]$$

$$g : \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} \mapsto s\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 6 \\ -7 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 4 & -7 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$$

Alltså är avb. matriserna $A_f = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ & $A_g = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 4 & -7 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$

b) Minns avbildn. matris av $g \circ f$ är

$$A_g A_f = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 4 & -7 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -10 \\ 11 \end{bmatrix}$$

c) Alltså är $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ $t \mapsto t(9,-10,11)$ (3)

Alltså är värdemängden $\underline{\text{linjen } t(9,-10,11)\ t \in \mathbb{R}}$

---

4) Obs $A = \begin{bmatrix} \cos \pi/4 & -\sin \pi/4 \\ \sin \pi/4 & \cos \pi/4 \end{bmatrix}$ avb. matris för

$f_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$x \longmapsto x$ roterad moturs $\pi/4$ radianer

a) A^7 är avb. matris för $(f_A)^7 = \underbrace{f_A \circ \dots \circ f_A}_{7 \text{ gånger}}$ – moturs rotation med $7\pi/4$ rad

Alltså $A^7 = \begin{bmatrix} \cos 7\pi/4 & -\sin 7\pi/4 \\ \sin 7\pi/4 & \cos 7\pi/4 \end{bmatrix} = \underline{1/\sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}$

b) Obs $(f_A)^8 = id$ (rotation m $8\pi/4 = 2\pi$ rad)

$\Rightarrow A^8 = I$ Alltså $\underline{A^{17} = A = 1/\sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}$

---

5 a) FALSKT ty det delbar m b

b) FALSKT ty då skulle $-i$ också ha mult 3

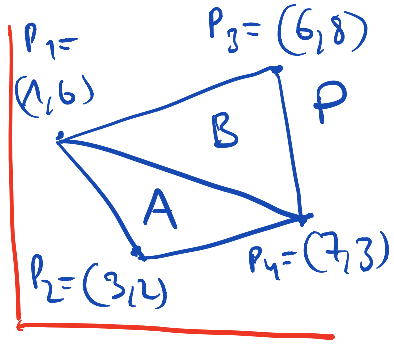
c) SANT (för alla val av u, v, w)

d) SANT Värdemängden är ℓ som har dim 1

e) FALSKT Entydig h-invers finns bara för kvadratiska matriser.

f) FALSKT Planen skär ty olika normalriktn

6 a)



Area (P) =
Area (A) + Area (B)

A spanns av $\overrightarrow{P_1P_2}$ & $\overrightarrow{P_1P_4}$

B —"— $\overrightarrow{P_1P_3}$ & $\overrightarrow{P_1P_4}$

Räkna: $\overrightarrow{P_1P_2} = (3,2)-(1,6) = (2,-4)$

$\overrightarrow{P_1P_3} = (6,8)-(1,6) = (5,2)$

$\overrightarrow{P_1P_4} = (7,3)-(1,6) = (6,-3)$

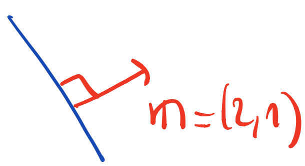
$$\text{Area}(A) = \frac{1}{2}\left|\,\left|\overrightarrow{P_1P_2}\ \overrightarrow{P_1P_4}\right|\,\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -4 & -3 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|18| = 9$$

$$\text{Area}(B) = \frac{1}{2}\left|\,\left|\overrightarrow{P_1P_3}\ \overrightarrow{P_1P_4}\right|\,\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|-27| = \frac{27}{2}$$

Alltså: $\underline{\underline{\text{Area}(P)}} = 9 + \frac{27}{2} = \underline{\underline{\frac{45}{2}}}$

b) $\ell : t(1,-2)\quad t \in \mathbb{R}$

Obs orto proj på ℓ linjär avbildning eftersom ℓ går genom origo.
Bestäm avbildningsmatris A_f



Obs $n = (2,1) \perp \ell$

Orto proj på n : $v \longmapsto \dfrac{v \cdot n}{|n|^2}\, n$

f - orto proj på ℓ : $v \longmapsto v - \dfrac{v \cdot n}{|n|^2}\, n$

5

$f: e_1 = (1,0) \longmapsto (1,0) - \dfrac{(1,0)\cdot(2,1)}{(2,1)\cdot(2,1)}(2,1) = (1,0) - \dfrac{2}{5}(2,1) =$

$\dfrac{1}{5}(1,-2)$

$f: e_2 = (0,1) \longmapsto (0,1) - \dfrac{(0,1)\cdot(2,1)}{5}(2,1) = (0,1) - \dfrac{1}{5}(2,1) =$

$\dfrac{1}{5}(-2,4)$

Alltså $A_f = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

Var hamnar punkterna?

$A_f\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} -11 \\ 22 \end{bmatrix}$, $A_f\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $A_f\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} -10 \\ 20 \end{bmatrix}$

$A_f\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ Extrempunkter: $11/5(-1,2)$ och $1/5\,(1,-2)$

Alltså $\underline{\underline{f(P) = \text{linjesegmentet med ändpunkter}}}$

$\underline{\underline{11/5(-1,2)\ \&\ 1/5\,(1,-2)}}$

---

7) Se Kapitel 7 Svar

8) Se Kapitel 4 & 5 Svar
