

TMA660 Linjär algebra och geometri F/TM

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.

Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, 5: 40 (max 50 p).

Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

1. (a) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \\ 8 & 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.
- (b) Lös ekvationssystemet $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 8x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$. (6 p)

2. Låt $p(z) = z^8 + 15z^4 - 16$.

- (a) Skriv $p(z)$ på formen $c(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n)$, där $c, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ är komplexa tal angivna på formen $a + bi$, där $a, b \in \mathbb{R}$. **Tips:** Sätt $z^4 = t$.
- (b) Faktorisera $p(z)$ reellt, det vill säga skriv $p(z)$ som en produkt av polynom med reella koefficienter och av så låg grad som möjligt.
- (c) Hur många komplexa nollställen har $p(z)$?
- (d) Hur många reella nollställen har $p(z)$? (7 p)

3. (a) Låt T vara tetraedern med hörn i $P_1 = (1, 0, 0)$, $P_2 = (2, 1, 0)$, $P_3 = (3, 2, 1)$ och $P_4 = (1, 2, 1)$. Beräkna volymen av T .
- (b) Låt f vara den linjära avbildning som avbildar P_1 på $(1, 2, 3)$, P_2 på $(2, 1, 6)$, P_3 på $(1, 4, 3)$ och P_4 på $(-1, 0, -3)$ och låt A vara dess avbildningsmatris. Beräkna determinanten av A . (6 p)

4. Antag att A är en (2×2) -matris sådan att $A^3 = \mathbf{0}$.

- (a) Följer det att $A = \mathbf{0}$? Motivera ditt svar. Om svaret är nej räcker det att ge ett motexempel.
- (b) Följer det att $A^2 = \mathbf{0}$? Motivera ditt svar. Om svaret är nej räcker det att ge ett motexempel. (6 p)

5. Låt A vara $(n \times n)$ -matrisen med matriselement $a_{ij} = \begin{cases} x^{i+j} & \text{om } i+j < n \\ x^{i+j-n} & \text{om } n \leq i+j < 2n \\ 1 & \text{om } i+j = 2n \end{cases}$.

Beräkna determinanten av A då

- (a) $n = 5$,
(b) $n = 50$,
(c) $n = 500$. (6 p)

6. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 poäng. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Den totala poängen är dock ≥ 0 . (7 p)

(a) Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Då är nollrummet till A samma som nollrummet till B .

(b) Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara två linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^3$. Då spänner $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ och $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ upp $\mathbb{R}^3$.

(c) Låt $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara spegling i linjen $\ell = \{x + 2y = 1\}$. Då är f en linjär avbildning.

(d) Avståndet mellan planen $\Pi_1 = \{x + y + z = 1\}$ och $\Pi_2 = \{x + 2y + 3z = 1\}$ är $\sqrt{14}$.

(e) Matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ saknar högerinvers.

(f) Antag att matriserna A och B har rang r respektive ρ . Då är rangen av AB lika med det minsta talet av r och ρ .

(g) Antag att $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ är linjärt oberoende vektorer. Då gäller att $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ och $\mathbf{u} - \mathbf{w}$ är linjärt oberoende.

7. Låt $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ vara en vektor i $\mathbb{R}^n$. Visa att det för varje vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ finns en entydigt bestämd uppdelning

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{u}^\perp,$$

där $\mathbf{u}'$ är parallell med $\mathbf{v}$ och $\mathbf{u}^\perp$ är ortogonal mot $\mathbf{v}$. (6 p)

8. (a) Visa att matrismultiplikation är associativ, det vill säga att $(AB)C = A(BC)$ för alla matriser A, B, C så att produkterna är definierade.

(b) Visa att vektorprodukt inte är associativ, det vill säga att

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} \neq \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

i allmänhet. (6 p)

Lycka till!

Elizabeth