Bassatsen: (Sats 4, s. 35, Sats 3, s. 103)

1. (a) Fler än n vektorer i $\mathbb{R}^n$ är linjärt beroende
   (b) Det krävs minst n vektorer för att spänna upp $\mathbb{R}^n$
   (c) En bas för $\mathbb{R}^n$ har exakt n vektorer

2. $\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_n$ bas för $\mathbb{R}^n$ $\iff$ $\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_n$ linjärt ober. $\iff$ $\mathrm{Span}(\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_n) = \mathbb{R}^n$

Bevis:

I. Förberedelser:

Antag att:
$$\mathbb{v}_1 = (v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1n}) \in \mathbb{R}^n$$
$$\vdots$$
$$\mathbb{v}_p = (v_{p1}, v_{p2}, \dots, v_{pn}) \in \mathbb{R}^n$$
$$\mathbb{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$$

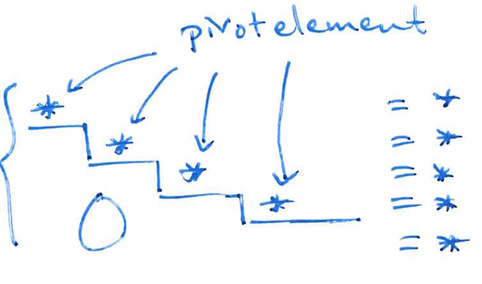
Då är vektorekv.: $x_1\mathbb{v}_1 + \dots + x_p\mathbb{v}_p = \mathbb{b}$ (*)

$\iff$

LES:
$$\begin{cases} v_{11}x_1 + v_{21}x_2 + \dots + v_{p1}x_p = b_1 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ v_{1n}x_1 + v_{2n}x_2 + \dots + v_{pn}x_p = b_n \end{cases} \quad (**)$$

(**) har: (i) n ekvationer
(ii) p variabler

(**) $\iff$ {Elementära radoperationer (Gaussning)} $\iff$



(***)

Låt k = antal pivotelement. Då $k \le p$ & $k \le n$ (alltid) (☆)

II. Bevis 1(a): $\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_p$ linjärt ober. $\overset{\text{def.}}{\iff}$ (*) med $\mathbb{b} = \mathbb{0}$ har endast lösn. $x_1 = \dots = x_p = 0$ $\iff$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (*) \,\&\, (***) \\ \text{samma lösn.} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$ Vi har pivotelement i varje kolumn i $(***)$ (då fri variabel $\Rightarrow \infty$ många lösn.) $\Leftrightarrow$

p kolumner

$\Leftrightarrow$ antal pivotkolumner $= p \xRightarrow{(\star)} p \leq n$

Bevis 1(b): $v_1, \ldots, v_p$ spänner upp $\mathbb{R}^n$ $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ Varje $b \in \mathbb{R}^n$ linj.-komb av $v_1, \ldots, v_p$ $\Leftrightarrow$ $(*)$ lösbart $\forall b \in \mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow$ $(***)$ lösbar $\forall$ högerled $\Leftrightarrow$ pivotelement i varje rad i $(***)$ $\Leftrightarrow$ antal pivotelement $= n$

$\xRightarrow{(\star)} n \leq p$

Bevis 1(c):

$v_1, \ldots, v_p$ bas för $\mathbb{R}^n$ $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_1, \ldots, v_p \text{ linj. ober.} \xRightarrow{1(a)} p \leq n \\ \underline{\text{och}} \\ \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_p) = \mathbb{R}^n \xRightarrow{1(b)} p \geq n \end{array} \right.$

$\therefore$ $v_1, \ldots, v_p$ bas för $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow p = n.$

Bevis 2: Antag $p = n$

$v_1, \ldots, v_p$ spänner upp $\mathbb{R}^n$ $\overset{1(b)}{\Leftrightarrow}$ antal pivotelement $= n \Leftrightarrow$ antal pivotelement $= p$

$\overset{1(a)}{\Leftrightarrow}$ $v_1, \ldots, v_p$ linj. ober

$\therefore$ $p = n$: $\mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_n) = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow v_1, \ldots, v_n$ linj. ober

$\Leftrightarrow v_1, \ldots, v_n$ bas för $\mathbb{R}^n$ ∎