

MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola

Tentamen

Hjälpmedel: Inga, inte ens miniräknare

Datum: 2023-10-21 kl. 14.00 - 18.00

Telefonvakt: Hossein Raufi

Telefon: 031 - 772 82 96

MVE670 Linjär algebra F/TM

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

Betygsgränser: 3: 20-29 p, 4: 30-39, 5: 40-50.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Till samtliga beräkningsuppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng.** Motivera och förklara så väl du kan.

1. (a) Bestäm skärningslinjen mellan planen $x - 2y + 2z = -2$ och $2x - y + 2z = 2$. Ange linjens ekvation på parameterform. (2 p)
- (b) Bestäm ekvationen för det plan som är vinkelrätt mot båda planen i (a) och innehåller punkten $P_0 = (1, 2, -1)$. Ange planets ekvation på affin form. (2 p)
- (c) Bestäm (minsta) avståndet från punkten $P = (2, 4, 4)$ till planet i (b). Bestäm dessutom den ortogonala projektionen av P på samma plan. (3 p)

2. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 4 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

- (a) Bestäm kolonnrummet och rangen av A . (2 p)
 - (b) Bestäm nollrummet och nulldimensionen av A . (2 p)
 - (c) Avgör om A har en vänsterinvers. (1 p)
 - (d) Avgör om A har en högerinvers. (1 p)
3. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 poäng. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Uteblivet svar ger 0 poäng. Den totala poängen är dock ≥ 0 .
- (a) Om det för $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ gäller att $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0$, så måste $|\mathbf{v} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})| = |\mathbf{v}|^2 |\mathbf{u}|$.
 - (b) Varje homogent linjärt ekvationssystem med fler ekvationer än obekanta har en unik lösning.
 - (c) Mängden av alla ortogonala matriser är ett underrum av mängden av alla kvadratiske matriser.
 - (d) Om λ är ett egenvärde till både A och A^2 , så är $\lambda = 0$.
 - (e) Om $z_0 \in \mathbb{C}$ är en lösning till $z^n = 1$, $n \in \mathbb{N}$, så är $\bar{z}_0 = z_0^{n-1}$.
 - (f) Antag att A och B är två kvadratiske matriser sådana att B kan erhållas genom att utföra elementära radoperationer på A . Då har matriserna samma determinant.

Var god vänd!

4. Faktorisera polynomet (6 p)

$$p(z) = (1 + i)z^2 - (4 + 8i)z + 1 + 21i$$

5. Låt T och F vara två linjära avbildningar från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$ sådana att $T(\mathbf{u})$ är den ortogonala projektionen av $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ på planet $3x - y + z = 0$ och $F(\mathbf{u})$ är speglingen av $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ i linjen $x = y = -z$. Bestäm avbildningsmatrisen för $F \circ T$. (6 p)

6. För vilka symmetriska 3×3 -matriser X gäller att (6 p)

$$AX = BX$$

givet att

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 10 \\ 4 & 5 & 12 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 8 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

7. (a) Definiera vad som menas med en *egenvektor* till en kvadratisk matris. (1 p)
(b) Definiera vad som menas med det *karakteristiska polynomet* till en kvadratisk matris. (1 p)
(c) Antag att A , B , och C är tre kvadratiske matriser som uppfyller $AC = CB$. Visa att om C inte har egenvärdet 0, så har A och B samma egenvärden. (5 p)

8. Låt A vara en $m \times n$ -matris, där $m \geq n$. Visa att en lösning till normalekvationen (6 p)

$$A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$$

minimerar $|A\mathbf{x} - \mathbf{b}|$.

Lycka till!
/Hossein