

MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola

Tentamen

Hjälpmedel: Inga, inte ens miniräknare

Datum: 2024-01-03 kl. 14.00 - 18.00

Telefonvakt: Hossein Raufi

Telefon: 031 - 772 82 96

MVE670 Linjär algebra F/TM

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

Betygsgränser: 3: 20-29 p, 4: 30-39, 5: 40-50.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Till samtliga beräkningsuppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng.** Motivera och förklara så väl du kan.

1. En rät linje går genom punkten $(-1, 3, 4)$ och har riktningsvektorn $(1, -1, 3)$. Bestäm linjens ortogonala projektion på planet $3x - y + 2z = -8$. Ange den projicerade linjens ekvation på parameterform. (6 p)

2. Givet är matrisen A och vektorn $\mathbf{b}$, där

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- (a) Visa att $\mathbf{b}$ inte tillhör A 's kolonnrum. (2 p)
- (b) Finn en approximativ lösning till ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med hjälp av minsta kvadratmetoden. (4 p)

3. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 poäng. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Uteblivet svar ger 0 poäng. Den totala poängen är dock ≥ 0 .

- (a) För alla vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ gäller att $|\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2$.
- (b) Om A och B är två ortogonala $n \times n$ matriser, så är också AB ortogonal.
- (c) Varje inverterbar matris är diagonaliserbar.
- (d) Mängden av alla kontinuerliga, udda funktioner $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är ett underrum av vektorrummet av alla kontinuerliga funktioner.
- (e) Om matrisen A har en pivotposition på varje rad, så är den linjära avbildningen $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ injektiv.
- (f) Om $z \in \mathbb{C}$ är sådan att $\bar{z} = 3/z$, så är $|z| < 2$.

Var god vänd!

4. (a) Bestäm konstanten $a \in \mathbb{R}$ så att $(1, 2, -2)$ blir en egenvektor till matrisen (1 p)

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

- (b) Finn, för detta värde på a , en ortonormerad bas av egenvektorer i $\mathbb{R}^3$. (6 p)

5. Givet är att $|z| = 1$. Visa att $|z - 2i| = |1 + 2iz|$. (6 p)

6. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ges av: (6 p)

$$F \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad F \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \quad F \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bestäm värdemängden till F . Existerar det något $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ sådant att $F(\mathbf{x}) = (1, 1, 1)$?

7. (a) Definiera vad som menas med en *skalärprodukt* på ett vektorrum V . (3 p)

- (b) Visa att för alla vektorer u och v i ett inre produktrum gäller att: (4 p)

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

8. Låt $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ vara en bas i $\mathbb{R}^n$. Visa att det för varje $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ finns entydigt bestämda reella tal $u_1, \dots, u_n$ så att (6 p)

$$u = u_1 \mathbf{v}_1 + \dots + u_n \mathbf{v}_n.$$

Lycka till!

/Hossein