GRUPPTEORI III

Vi såg att alla ändliga grupper är undergrupper av en PERMUTATIONSGRUPP.

→ Om vi förstår perm. grupp S_n har vi kommit en bra bit i vårt förståelse av grupper.

→ Också S_n är mycket viktig inom fysik när man har identiska partiklar.

Notationen kan vara förvirrande!

Betrakta S_3.

Låt $g \in S_3$: $g: \{a, b, c\} \longrightarrow \{b, c, a\}$

vi kan skriva $g = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Alltid i samma order (onödigt)

objektet i 1a plats (a) flyttas till 3e plats o.s.v.

(För samma g: $\{X_1, X_2, X_3\} \longrightarrow \{X_2, X_3, X_1\}$

Index 1 blir 2, INTE 3!)

Ex $\quad g = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in S_6.$

Q: $g : \{a, b, c, d, e, f\} \to \{\ ,\ ,\ ,\ ,\ ,\ \}$?

Ex $g = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in S_6$.

A: $g : \{a, b, c, d, e, f\} \to \{e, f, c, a, d, b\}$

Ex $g = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in S_6$.

$g : \{a, b, c, d, e, f\} \to \{e, f, c, a, d, b\}$

OBS: $1 \to 4 \to 5 \to 1$ $\quad$ $3 \to 3$ $\quad$ $2 \leftrightarrow 6$

$g = (1,4,5)(3)(2,6)$

kan strykas. Gör inget med 3e objekt.

<u>DISJUNKTA</u> CYKLER

$$(1,4,5) = \begin{bmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \\ 4, & 2, & 3, & 5, & 1, & 6 \end{bmatrix}$$

objekt på 1a plats flyttas till 4e plats o.s.v.

* Disjunkta cykler commuterar

$$(1\,4\,5)(2\,6) = (2\,6)(1\,4\,5)$$

* Men INTE icke disjunkta:

$$(1\,2\,\underline{3})(\underline{3}\,4) \neq (\underline{3}\,4)(1\,2\,\underline{3})$$

* En cyklisk perm. kan alltid skrives som produkt av "PARBYTE" (i,j) = cykel av längd = 2.

$$(1,4,5) = (1,5)(1,4).$$

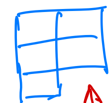
* KONJUGATKLASSERNA består av perm. med cyklerna av SAMMA LÄNGD:

Ex: $(123)(45)$, $(134)(25)$, $(345)(12)$ ....
är alla i samma klass.

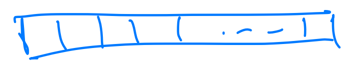
Bevis: Konjugering med en godtycklig parbyte lämnar cykel-struktur oförändrad:

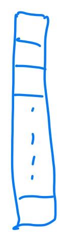
Ex: $(34)(\underline{123})(\underline{45})(34) = (\underline{124})(\underline{35})$

Vi representerar en KONJUGATKLASS med hjälp av en YOUNG TABLEAUX:

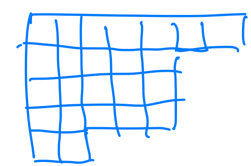
Ex: $(123)(45) \in$  för S_5.

och alla andra...

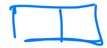
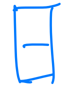
$e = (1)(2)(3)\dots(n) \in$ 

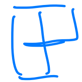
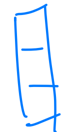
$(1\,2\,3\,4 \dots n)$ och alla andra $(n-1)!$ $\in$ ,

Allmänt



antal □ minskar eller är samma

Ex: S_2 :   2 konj. klass.

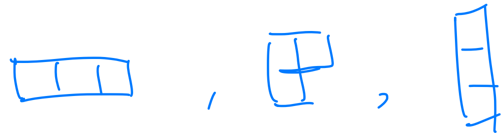
S_3 :  ,  ,  3 konj klass.

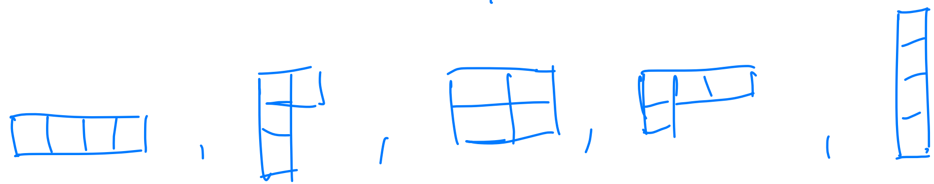
Ex: S_2 : $\ydiagram{2}$ $\ydiagram{1,1}$ 2 konj. klass.

S_3 : $\ydiagram{3}$, $\ydiagram{2,1}$, $\ydiagram{1,1,1}$ 3 konj klass.

Q: S_4 : ?

Ex: S_2 :  2 konj. klass.

S_3 :  3 konj klass.

A: S_4 : 

5 konj. klass.

SATS! FÖR ALLA ÄNDLIGA GRUPPER:

I) # IRREPS = # KONJUGATKLASSER

II) $$N = \sum_{a=1}^{\#\,\mathrm{IRREPS}} n_a^2 \,, \quad N = \# G \ \text{(antal element i } G\text{)}, \quad n_a = \dim D_a \ \text{(antal rader eller kolumner)}.$$

Vi kommer att bevisa detta viktiga teorem snart, men låt oss först titta på några ICKE-uppenbara exempel.

(Vi måste också påminna oss om DIREKT SUMMAN $\oplus$ och TENSOR PRODUKTEN $\otimes$ av matriser.)

Exempel.

För S_n # KONJ. KLASSER = # YOUNG TAB.

$$S_3 : \{ e, r_1, r_2, s_1, s_2, s_3 \}$$

ENKELT. (den triviala irrep)

$$D_{\square\square\square} : \{ 1, 1, 1, 1, 1, 1 \}$$

Mmm......

Okej.....

$$D_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}} : \{ 1, 1, 1, -1, -1, -1 \}$$

HUR???

$$D_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}} : \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

$$\# S_3 = 6 \qquad n_{\square\square\square} = n_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}} = 1, \quad n_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}} = 2 : \qquad 6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$$

Också tänk på den DEFINIERANDE och den REGULJÄRA REPRESENTATIONERNA av S_3

$$D_D = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

3 x 3 matriser

$$D_R = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \\ 0 & & & & 1 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & & \ddots & & & \\ 1 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \end{pmatrix}, \ldots \right\}$$

6 x 6 matriser

VA???

VAD???

HUR???

$$D_D = D_{\square\square\square} \oplus D_{\begin{smallmatrix}\square & \square \\ \square & \end{smallmatrix}}$$

$$D_R = D_{\square\square\square} \oplus D_{\begin{smallmatrix}\square & \square \\ \square & \end{smallmatrix}} \oplus D_{\begin{smallmatrix}\square & \square \\ \square & \end{smallmatrix}} \oplus D_{\begin{smallmatrix}\square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix}}$$

Till sist:

$$D_{\ydiagram{2,1}} \otimes D_{\ydiagram{2,1}} = D_{\ydiagram{3}} \oplus D_{\ydiagram{2,1}} \oplus D_{\ydiagram{1,1,1}}$$

VAD ÄR DET?

OCH DEM?

DIREKT SUMMA $\oplus$ och
TENSOR PRODUKT $\otimes$ i praktiken.

$A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ $n \times n$ matris

$B : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ $m \times m$ matris,

DIREKT SUMMA $\oplus$ och TENSOR PRODUKT $\otimes$ i praktiken.

$A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ $n \times n$ matris

$B : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ $m \times m$ matris.

Naturligtvis vet vi hur man adderar och multiplicerar matriser:

$$(A + A')_{ij} = A_{ij} + A'_{ij} \qquad (AA')_{ij} = \sum_k A_{ik} A'_{kj}$$

men $\oplus$ och $\otimes$ betyder något annat!

DIREKT SUMMA $\oplus$ och TENSOR PRODUKT $\otimes$ i praktiken.

$A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ $n \times n$ matris

$B : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ $m \times m$ matris,

DIREKT SUMMA $\oplus$

$A \oplus B$ är en $(n+m) \times (n+m)$ matris

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

(Verkar på $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^m \simeq \mathbb{C}^{n+m}$)

DIREKT SUMMA $\oplus$ och TENSOR PRODUKT $\otimes$ i praktiken.

$A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ $n \times n$ matris

$B : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ $m \times m$ matris.

DIREKT SUMMA $\oplus$

$A \oplus B$ är en $(n+m) \times (n+m)$ matris

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

Q: $\operatorname{tr}(A \oplus B) = \,?$

DIREKT SUMMA $\oplus$ och TENSOR PRODUKT $\otimes$ i praktiken.

$A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ $n \times n$ matris

$B : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ $m \times m$ matris,

DIREKT SUMMA $\oplus$

$A \oplus B$ är en $(n+m) \times (n+m)$ matris

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

A : $\operatorname{tr}(A \oplus B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$

DIREKT SUMMA $\oplus$ och TENSOR PRODUKT $\otimes$ i praktiken.

$A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ $n \times n$ matris

$B : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ $m \times m$ matris,

DIREKT SUMMA $\oplus$

$A \oplus B$ är en $(n+m) \times (n+m)$ matris

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

Q: $\det(A \oplus B) = ?$

DIREKT SUMMA $\oplus$ och TENSOR PRODUKT $\otimes$ i praktiken.

$A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ $n \times n$ matris

$B : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ $m \times m$ matris.

DIREKT SUMMA $\oplus$

$A \oplus B$ är en $(n+m) \times (n+m)$ matris

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

A: $\det(A \oplus B) = \det A \cdot \det B$.

DIREKT SUMMA $\oplus$ och

TENSOR PRODUKT $\otimes$ i praktiken.

$A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ $n \times n$ matris

$B : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ $m \times m$ matris,

TENSOR PRODUKT $\otimes$

$A \otimes B$ är en $nm \times nm$ matris

$$(A \otimes B)_{I,J} = A_{ij} B_{kl} \qquad I = (i,k), \quad J = (j,l)$$

(Verkar på $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m = \mathbb{C}^{n \cdot m}$)

DIREKT SUMMA $\oplus$ och TENSOR PRODUKT $\otimes$ i praktiken.

$A: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ $n \times n$ matris

$B: \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ $m \times m$ matris,

TENSOR PRODUKT $\otimes$

$A \otimes B$ är en $nm \times nm$ matris

$$(A \otimes B)_{I,J} = A_{ij} B_{kl} \qquad I = (i,k),\ J = (j,l)$$

ex: $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & ? & \\ & & \end{pmatrix}$$

DIREKT SUMMA $\oplus$ och TENSOR PRODUKT $\otimes$ i praktiken.

$A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ $n \times n$ matris

$B : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ $m \times m$ matris,

TENSOR PRODUKT $\otimes$

$A \otimes B$ är en $nm \times nm$ matris

$$(A \otimes B)_{I,J} = A_{ij} B_{kl} \qquad I = (i,k), \quad J = (j,l)$$

ex: $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a & & \\ a & a & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

DIREKT SUMMA $\oplus$ och TENSOR PRODUKT $\otimes$ i praktiken.

$A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ $n \times n$ matris

$B : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ $m \times m$ matris,

TENSOR PRODUKT $\otimes$

$A \otimes B$ är en $nm \times nm$ matris

$$(A \otimes B)_{I,J} = A_{ij} B_{kl} \qquad I = (i,k),\ J = (j,l)$$

ex: $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha & a\beta & & \\ a\gamma & a\delta & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

DIREKT SUMMA $\oplus$ och
TENSOR PRODUKT $\otimes$ i praktiken.

$A: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ $n \times n$ matris

$B: \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ $m \times m$ matris,

TENSOR PRODUKT $\otimes$

$A \otimes B$ är en $nm \times nm$ matris

$$(A \otimes B)_{I,J} = A_{ij} B_{kl} \qquad I = (i,k),\ J = (j,l)$$

ex: $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha & a\beta & b & b \\ a\gamma & a\delta & b & b \\ c & c & d & d \\ c & c & d & d \end{pmatrix}$$

DIREKT SUMMA $\oplus$ och TENSOR PRODUKT $\otimes$ i praktiken.

$A: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ $n \times n$ matris

$B: \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ $m \times m$ matris,

TENSOR PRODUKT $\otimes$

$A \otimes B$ är en $nm \times nm$ matris

$$(A \otimes B)_{I,J} = A_{ij} B_{kl} \qquad I = (i,k), \; J = (j,l)$$

ex: $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha & a\beta & b\alpha & b\beta \\ a\gamma & a\delta & b\gamma & b\delta \\ c\alpha & c\beta & d\alpha & d\beta \\ c\gamma & c\delta & d\gamma & d\delta \end{pmatrix}$$

DIREKT SUMMA $\oplus$ och TENSOR PRODUKT $\otimes$ i praktiken.

$A: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ $\quad n \times n$ matris

$B: \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ $\quad m \times m$ matris,

TENSOR PRODUKT $\otimes$

$A \otimes B$ är en $mn \times mn$ matris

Q: $\operatorname{tr}(A \otimes B) = ?$

DIREKT SUMMA $\oplus$ och TENSOR PRODUKT $\otimes$ i praktiken.

$A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ $\quad n \times n$ matris

$B : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ $\quad m \times m$ matris,

TENSOR PRODUKT $\otimes$

$A \otimes B$ är en $nm \times nm$ matris

A: $\operatorname{tr}(A \otimes B) = \operatorname{tr} A \cdot \operatorname{tr} B$

DIREKT SUMMA $\oplus$ och TENSOR PRODUKT $\otimes$ i praktiken.

$A: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ $n \times n$ matris

$B: \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ $m \times m$ matris,

TENSOR PRODUKT $\otimes$

$A \otimes B$ är en $nm \times nm$ matris

Q: $\det(A \otimes B) = ?$

DIREKT SUMMA $\oplus$ och

TENSOR PRODUKT $\otimes$ i praktiken.

$A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ $n \times n$ matris

$B : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ $m \times m$ matris,

TENSOR PRODUKT $\otimes$

$A \otimes B$ är en $mn \times mn$ matris

A: $\det(A \otimes B) = (\det A)^m (\det B)^n$

(beviset kommer snart ...)

OBS placeringen.

Låt $A, A', \ldots$ vara $n \times n$ och $B, B', \ldots$ $m \times m$.

$$Q: \; (A + A') \oplus B \overset{?}{=} (A \oplus B) + (A' \oplus B)$$

Låt A, A' ... vara $n \times n$ och B, B' ... $m \times m$.

$$A: (A + A') \oplus B \overset{\text{NEJ}}{\cancel{=}} (A \oplus B) + (A' \oplus B)$$

$$\begin{pmatrix} A+A' & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} A+A' & 0 \\ 0 & 2B \end{pmatrix}}$$

AAARGH!

Låt $A, A', \ldots$ vara $n \times n$ och $B, B', \ldots$ $m \times m$.

Däremot: $(A + A') \otimes B = (A \otimes B) + (A' \otimes B)$

Också: $(A \oplus B) \cdot (A' \oplus B') = (AA') \oplus (BB')$

$$(A \otimes B) \cdot (A' \otimes B') = (AA') \otimes (BB')$$

$$(A\otimes B)\cdot(A'\otimes B') = (AA')\otimes(BB')$$

kan användas för att visa att

$$\det(A\otimes B) = (\det A)^m \cdot (\det B)^n \, :$$

$$A\otimes B = (A\otimes 1\!\!1_m)\cdot(1\!\!1_n \otimes B)$$

och $\det(A\otimes 1\!\!1_m) = \det\begin{pmatrix} A & & & \\ & A & & \\ & & \ddots & \\ & & & A \end{pmatrix} = (\det A)^m$

m gånger