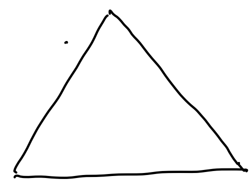
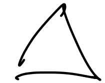
GRUPPTEORI. I

Vi börjar med ett exempel: betrakta en liksidig triangel

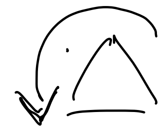


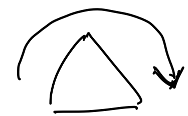
Vi kan göra olika transformationer, som lämnar den oförändrad: (SYMMETRI)

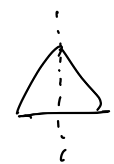
e: "gör ingenting" 

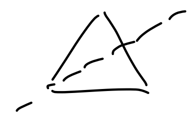
$\uparrow$

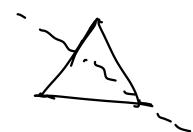
"enhet"

r_1 "rotera 120° moturs" 

r_2 "rotera 120° medurs" 

s_1 "spegelad längs" 

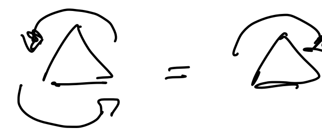
s_2 "spegelad längs" 

s_3 "speglad längs" 

$G = \{e, r_1, r_2, s_1, s_2, s_3\}$

Egenskaper $\longrightarrow$ AXIOMER

1) $f, g \in G$: $f \circ g \in G$ e.g. $r_1 \circ r_1 = r_2$



2) $f, g, h \in G$: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

3) $\exists e \; \forall f \in G$: $e \circ f = f \circ e = f$.

4) $\forall f \in G \; \exists f^{-1} \in G$: $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = e$

e.g. $r_1^{-1} = r_2$

$G = \{e, r_1, r_2, s_1, s_2, s_3\}$ är en GRUPP.

Dessutom, OM $\forall f, g \quad f \circ g = g \circ f$,

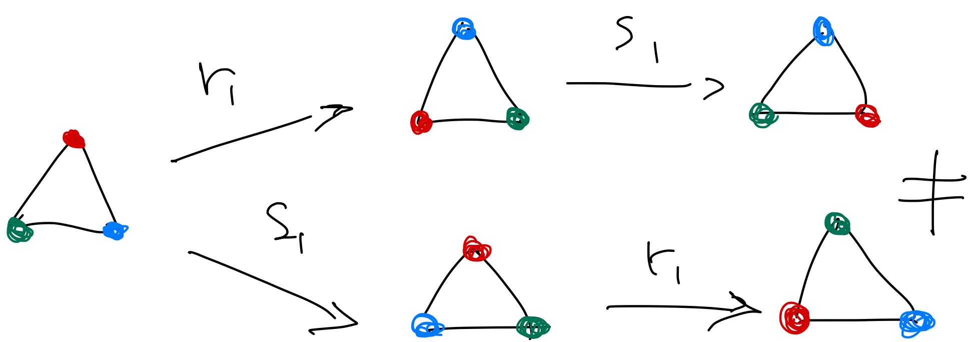
G kallas för ABELSK eller KOMMUTATIV

Q: Är $G = \{e, r_1, r_2, s_1, s_2, s_3\}$ ABELSK?

Dessutom, OM $\forall f, g \quad f \circ g = g \circ f$,
G kallas för ABELSK eller KOMMUTATIV

Q: Är $G = \{e, r_1, r_2, s_1, s_2, s_3\}$ ABELSK?

A: Nej! $\quad s_1 \circ r_1 \neq r_1 \circ s_1$

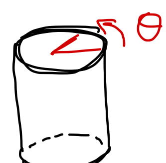


Inom fysiken används vanligtvis två "typer" av grupper:

DISKRETA — d.v.s. med ändligt (eller räknebart) antal element

T.ex. $G = \{e, r_1, r_2, s_1, s_2, s_3\}$ här 6 elementer.

KONTINUERLIGA (LIE) — ∞ antal element som parametriseras av kontinuerlige variabler

T.ex. 

$G = \{r(\theta),\ \theta \in [0, 2\pi[\}$.

Vi börjar med ändliga grupper.

Q: Vad är den minsta gruppen?

Vi börjar med ändliga grupper.

Q: Vad är den minsta gruppen?

A: $G = \{e\}$ 1 element

Vi börjar med ändliga grupper.

Q: Vad är den minsta gruppen?

A: $G = \{e\}$ 1 element

Q: Med två elementer? $G = \{e, a\}$

Vi börjar med ändliga grupper.

Q: Vad är den minsta gruppen?

A: $G = \{e\}$ 1 element

Q: Med två elementer? $G = \{e, a\}$

A:

	e	a
e		
a		

Vi börjar med ändliga grupper.

Q: Vad är den minsta gruppen?

A: $G = \{e\}$ 1 element

Q: Med två elementer? $G = \{e, a\}$

A:

	e	a
e	e	a
a	a	?

Vi börjar med ändliga grupper.

Q: Vad är den minsta gruppen?

A: $G = \{e\}$ 1 element

Q: Med två elementer? $G = \{e, a\}$

A:

	e	a
e	e	a
a	a	e

"Sudoku"

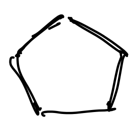
* För p = primtal finns det bara en grupp med p elementer.

$$G_p = \mathbb{Z}_p = \mathbb{Z} \bmod p = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$$

(Abelsk). $\qquad n+m \pmod p$

$\cong$ ROTATION av en reguljär p-polygon

Ex $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ "$3+4=2$" o.s.v.



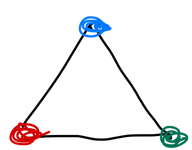
→ Rotationer med $\frac{2\pi}{5} \times k$.

$k = 0, 1, 2, 3, 4$.

* För $n \neq$ primtal finns det fler.
T. ex. det finns TVÅ grupper med 4 elementer. (övning).

* Den första icke abelska gruppen är var gode vän $G = \{e, r_1, r_2, s_1, s_2, s_3\}$ med 6 elementer:

$$G = S_3 = \{\text{alla permutationer av 3 objekt}\}$$



* S_n = Permutation grupp av n objekt.

Q: Hur många element har S_n?

* S_n = Permutation grupp av n objekt.

Q: Hur många element har S_n?

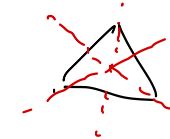
A: $\# S_n = n!$

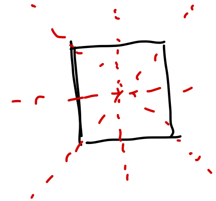
* S_n = Permutation grupp av n objekt.

Q: Hur många element har S_n?

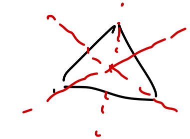
A: $\# S_n = n!$

* D_n = DIHEDRAL GRUPP = {rotationer OCH reflektioner} av en reguljär n-polygon.

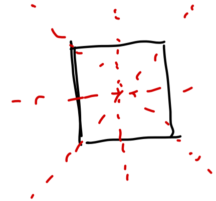
Ex: $G = \{e, r_1, r_2, s_1, s_2, s_3\} = D_3 = S_3$ 

Q: $D_4 \overset{?}{=} S_4$ 

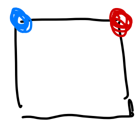
Ex: $G = \{e, r_1, r_2, s_1, s_2, s_3\} = D_3 = S_3$



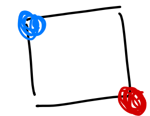
Q: $D_4 \overset{?}{=} S_4$

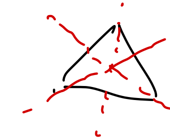


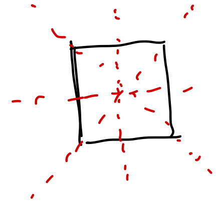
A: NEJ

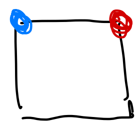
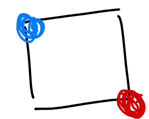


kommer aldrig att bli

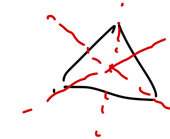


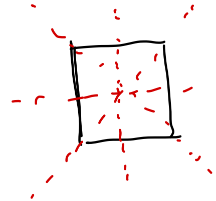
Ex: $G = \{e, r_1, r_2, s_1, s_2, s_3\} = D_3 = S_3$ 

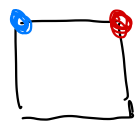
Q: $D_4 \stackrel{?}{=} S_4$ 

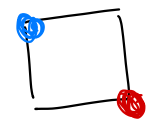
A: NEJ  kommer aldrig att bli 

Q: $\# D_4$?

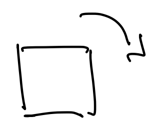
Ex: $G = \{e, r_1, r_2, s_1, s_2, s_3\} = D_3 = S_3$ 

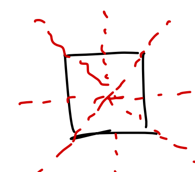
Q: $D_4 \overset{?}{=} S_4$ 

A: NEJ 

kommer aldrig att bli 

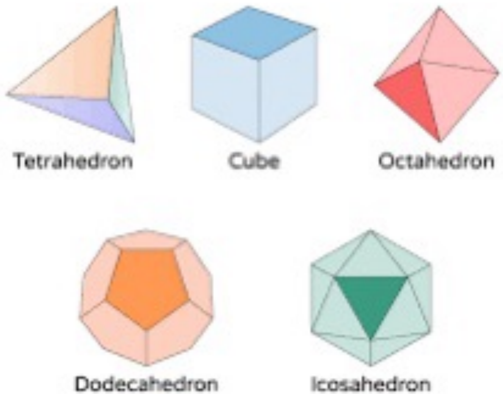
Q: $\# D_4$?

A: $\# D_4 = 8$ = 4 rotationer  $90°$ . . .

+ 4 reflektion 

$(\# D_n = 2n)$

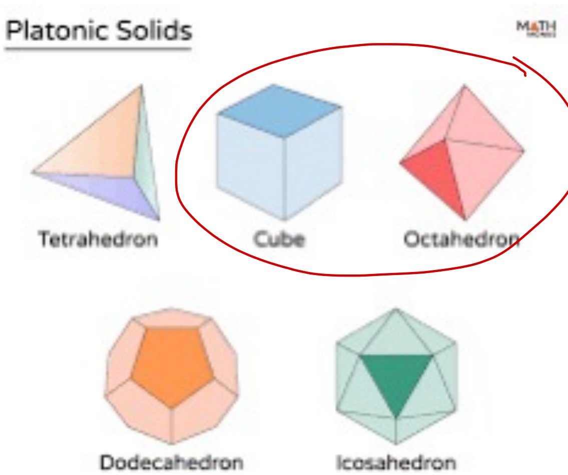
Platonic Solids



T : $4 \cdot 3 = 12$ rotationer

$+ 12$ reflex. $\Big\} = 24 = 4!$

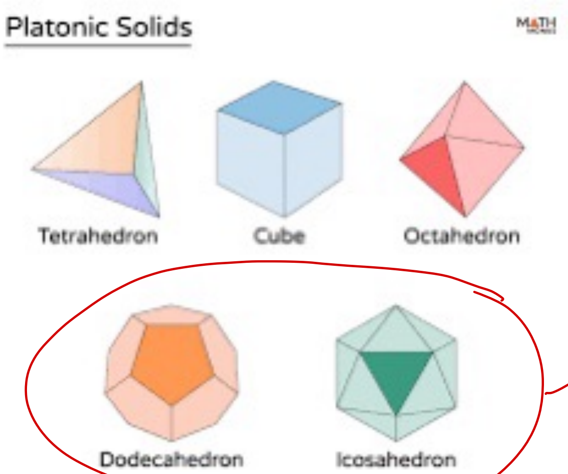
$T = S_4$



$6 \times 4 = 8 \times 3 = 24$ rot.

$+ \; 24$ reflekt.

$= 48.$



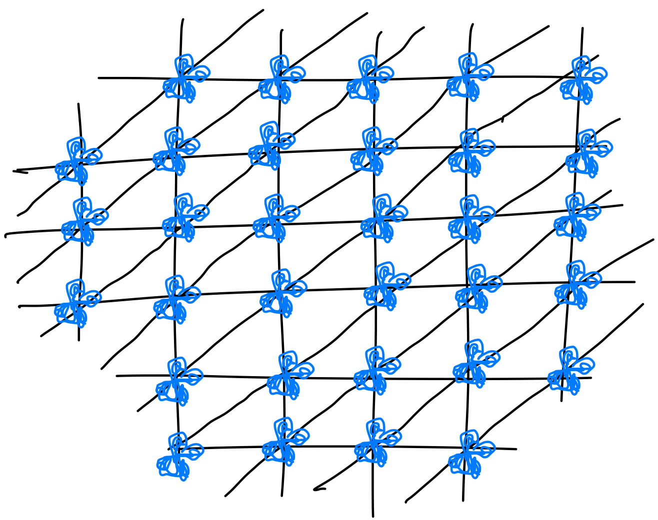
$12 \times 5 = 20 \times 3 = 60$ rot

$+ 60$ reflekt.

$= 120.$

* Mycket viktiga i fasta tillståndets fysik är symmetrier av en

KRISTALLSTRUKTUR



	BRAVAIS	CRYSTAL
POINT GROUPS	7	32
SPACE GROUPS	14	230

Inkl. translation.