

GRUPPTEORI IV

SATS! FÖR ALLA ÄNDLIGA GRUPPER

I) $\# \text{ IRREPS} \implies \# \text{ KONJUGATKLASSER}$

II) $N = \sum_{a=1}^{\# \text{ IRREPS}} m_a^2, \quad N = \# G, \quad m_a = \dim D_a$

IRREP: ICKE REDUCERBART REPRESENTATION

↑
kom ihåg:

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$$



KONJ. KLASS:

$$g_1 \sim g_2 \text{ om } g_1 = g g_2 g^{-1}$$

SHURS LEMMA

// It must be right, because
the author was Shur. //

SHUR'S LEMMA / OR

① Låt $D_1(g): V_1 \rightarrow V_1$ icke ekvivalenta
 $D_2(g): V_2 \rightarrow V_2$ IRREPS

$$A: V_2 \rightarrow V_1 \quad D_1(g)A = A D_2(g) \quad \forall g \in G$$

$$\Rightarrow A = 0$$

② Låt $D(g): V \rightarrow V$ IRREP

$$A: V \rightarrow V \quad D(g)A = A D(g) \quad \forall g \in G$$

$$\Rightarrow A \propto \mathbb{1} \quad (A = \lambda \mathbb{1}, \lambda \in \mathbb{C})$$

Bevis. $D_1(g): V_1 \rightarrow V_1$, $D_2(g): V_2 \rightarrow V_2$, $A: V_2 \rightarrow V_1$

V_1 kan alltid anta att $\exists v_2 \neq 0$ så att $Av_2 = 0$

- Om $\dim V_2 > \dim V_1$ måste det vara.
- Om $\dim V_1 > \dim V_2$ byt namn $V_1 \leftrightarrow V_2$ ☹
- Om $\dim V_1 = \dim V_2$ och $\nexists v_2$ då är

A inverterbar $\Rightarrow D_1(g) = AD_2(g)A^{-1}$
ekvivalenta.

Låt $P: V_2 \rightarrow \ker A: \underbrace{AD_2(g)P}_{\text{också } \in \ker A} = \underbrace{D_1(g)AP}_{=0 \text{ per def.}} = 0$
 $\neq \{0\}$
 $\ker A$ invariant rum

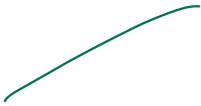
Men D_2 är en IRREP $\Rightarrow \ker A = V_2 \Rightarrow A = 0$

$$D(g): V \rightarrow V, \quad A: V \rightarrow V.$$

Betrakta $A_\lambda = A - \lambda I$. $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ så att

$$\exists v \neq 0 \quad A_\lambda v = 0$$

Samme argument som før: $A_\lambda = 0$

$$\Rightarrow A = \lambda I.$$


KILLER APP!

WIGNER-ECKART (like)

Låt $|a, j, x\rangle$ vara en bas i $\mathcal{H}$
OLIKA IRREP $\nearrow$
 $\uparrow$ 1, 2, ..., m_a
 $\nwarrow$ andra kvanttal.

$$\langle a j x | b k y \rangle = \delta_{ab} \delta_{jk} \delta_{xy}$$

$$\langle a j x | D(g) | b k y \rangle = \delta_{ab} \delta_{xy} D(g)_{jk}$$

$$\begin{cases} D^{-1} = D^\dagger \\ [D, H] = 0 \end{cases}$$

↑
SYMMETRI

Låt $\mathcal{O} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ så att $[D(g), \mathcal{O}] = 0$

Vi vill veta hur $\langle a j x | \mathcal{O} | b k y \rangle$ ser ut.

$$0 = \langle a_j x | [D(g), \theta] | b k y \rangle = \langle a_j x | D(g) \theta | b k y \rangle - \text{"D} \leftrightarrow \theta \text{"}$$

$$= \sum_{c l z} \langle a_j x | D(g) | c l z \rangle \langle c l z | \theta | b k y \rangle - \text{"D} \leftrightarrow \theta \text{"}$$

$$= \sum_{c l z} \delta_{ac} \delta_{xz} D_a(g)_{je} \langle c l z | \theta | b k y \rangle - \text{"D} \leftrightarrow \theta \text{"} =$$

$$= \sum_l D_a(g)_{je} \underbrace{\langle a l x | \theta | b k y \rangle}_{\text{Beter sig som A: Shur's lemma}}$$

$\Rightarrow A = 0$ om $a \neq b$, $A \propto \delta_{ek}$ om $a = b$

$$\Rightarrow \langle a l x | \theta | b k y \rangle = \delta_{ab} \delta_{ek} \cdot f_a(x, y)$$

ORTOGONALITETSTEOREM.

Låt D_a, D_b vara två IRREPS.

1) Om $a \neq b$:
$$\sum_{g \in G} D_a(g^{-1})_{kj} D_b(g)_{lm} = 0$$

2) Om $a = b$:
$$\sum_{g \in G} D(g^{-1})_{kj} D(g)_{lm} = \frac{N}{n} \delta_{je} \delta_{km}$$

där $N = \#G$, $D(g)$ $n \times n$ matris.

kan sammanfattas:
$$\sum_{g \in G} D_a(g^{-1})_{kj} D_b(g)_{lm} = \frac{N}{n_a \text{ (eller } n_b)} \delta_{ab} \delta_{je} \delta_{km}$$

OBS: D UNITÄR $\Rightarrow D(g^{-1})_{kj} = D(g)_{jk}^*$

Bevis

$$A_{km} \stackrel{\text{DEF}}{=} \sum_g D_a(g^{-1})_{kj} D_b(g)_{lm}$$

(betrakta a, b, j, l som fixerade)

$$D_a(g')_{kh'} A_{h'm} = \sum_g D_a(g'g^{-1})_{kj} D_b(g)_{lm} =$$

$$\sum_g D_a(\tilde{g}^{-1})_{kj} D_b(\tilde{g}g')_{lm} = A_{km'} D_b(g')_{m'm}.$$

Shur: om $a \neq b \Rightarrow A = 0 \quad \forall \quad !)$

$a = b \Rightarrow A \propto \mathbb{1}.$

$\hookrightarrow$

$$A_{km} = \sum_g \underbrace{D(g^{-1})_{kj}}_{\text{SAMMA}} D(g)_{lm} = \delta_{jl} \delta_{km}$$

$$A_{km} = \sum_g D(g^{-1})_{kj} D(g)_{lm} = \lambda_{je} \delta_{km}$$

SAMMA.

$$\sum_k A_{kk} = \lambda_{je} \sum_k 1 = n \lambda_{je}$$

MEN OCKSÅ

$$\begin{aligned} \sum_k A_{kk} &= \sum_g D(g^{-1})_{kj} D(g)_{ek} = \sum_g D(g)_{ek} D(g^{-1})_{kj} = \\ &= \sum_g D_{e_j}(e) = N \delta_{ej} \quad (\# G = N) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda_{je} = \frac{N}{n} \delta_{je} \quad \checkmark \quad 2)$$

KARAKTÄR

Def: $\chi_D(g) = \text{tr}(D(g))$

Behöver inte
vara irreducibel
 $\text{tr}(D(g)) = \text{tr}(D_1(g)) + \dots$

OBS: $D \sim D' \Rightarrow \chi_D(g) = \chi_{D'}(g) \quad \forall g \in G$

$D(g) = S D'(g) S^{-1} \Rightarrow \text{tr} D(g) = \text{tr} (\cancel{S} D'(g) \cancel{S^{-1}})$

OBS: $g \sim g' \Rightarrow \chi_D(g) = \chi_D(g')$

$\chi_D(g) = \chi_D(\tilde{g} g' \tilde{g}^{-1}) = \text{tr} (\cancel{D(\tilde{g})} D(g') \cancel{D(\tilde{g}^{-1})}) = \chi_D(g')$

$\Rightarrow$ Vi kan skriva $\chi_D([g])$

Specifikt, för en irrep D_a kan vi tänka på χ_{D_a} som en vektor:

$$\chi_{D_a} = \begin{pmatrix} \chi_{D_a}([e]) \\ \chi_{D_a}([g,1]) \\ \vdots \end{pmatrix} \leftarrow \dim = \# \text{ KONJUGATKLASSER.}$$

Först visar vi att alla $F([g])$, dvs

$F: G \rightarrow \mathbb{C}$ KONSTANT i alla KONJUGATKLASSER

$F(g) = F(\tilde{g} g \tilde{g}^{-1})$, kan uttryckas som

$$F([g]) = \sum_{a=1}^{\# \text{IRREPS}} C_a \chi_{D_a}([g])$$

Observera att för den REGULJÄRA Repres:

$$D_{ge}^R(g') = \begin{cases} 1 & \text{om } g = g' \\ 0 & \text{om } g \neq g' \end{cases} :$$

$$g' \begin{bmatrix} e \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g' \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 = D_{g'e}^R(g') \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow F(g) = \sum_{g' \in G} C_{g'} D_{g'e}^R(g)$$

Men $D^R(g) = U \begin{pmatrix} \underline{D^R(g)} \\ \vdots \end{pmatrix} U^\dagger$ REDUCERBART

$$\Rightarrow F(g) = \sum_{a,ij} c_{a,ij} D^a(g)_{ij}$$

$$\begin{aligned} \text{Men } F(g) &= \frac{1}{N} \sum_{\tilde{g}} F(\tilde{g} g \tilde{g}^{-1}) = \sum_{\tilde{g}} \frac{1}{N} c_{a,ij} D^a(\tilde{g} g \tilde{g}^{-1})_{ij} \\ &= \sum_{\tilde{g}, a, ij} \frac{1}{N} c_{a,ij} \underbrace{D^a(\tilde{g})_{ik}}_{\text{ORTOGONALITET + STRUKTUR}} \underbrace{D^a(g)_{ke}}_{\text{ORTOGONALITET + STRUKTUR}} \underbrace{D^a(\tilde{g}^{-1})_{ej}}_{\text{ORTOGONALITET + STRUKTUR}} = \sum_{a,j} \frac{1}{m_a} c_{a,ij} \chi_a(g) \\ &= \frac{N}{m_a} \delta_{ij} \delta_{ke} \end{aligned}$$

Nu visar vi att χ_a är ORTOGONAL

ORTOGON.
THEOREM.

$$\Rightarrow \sum_g \frac{1}{N} \chi_{D_a}(g)^* \chi_{D_b}(g) = \delta_{ab}$$

anta att D_a, D_b är UNITÄRA.

Låt $\alpha = [g]$, $k_\alpha = \#[g]$

$$\sum_g \frac{1}{N} \chi_{D_a}(g)^* \chi_{D_b}(g) = \sum_\alpha \frac{k_\alpha}{N} \chi_{D_a}^*(\alpha) \chi_{D_b}(\alpha) = \delta_{ab}$$

$$\Rightarrow V_{\alpha a} = \sqrt{\frac{k_\alpha}{N}} \chi_{D_a}(\alpha) \text{ } \ddot{\text{r}} \text{ UNITÄR}$$

$$\Rightarrow \# \text{ IRREPS} = \# \text{ KONJ KLASSE}$$

For en godtycklig $D = \underbrace{D_1 \oplus \dots D_1}_{m_1^D} \oplus \underbrace{D_2 \oplus \dots D_2}_{m_2^D} \oplus \dots \underbrace{D_m \oplus \dots D_m}_{m_m^D}$

$$\sum_g \frac{1}{N} \chi_{D_a}(g^*) \chi_D(g) = m_1^D \delta_{a,1} + \dots + m_m^D \delta_{a,m} = m_a^D$$

Låt $D = D_R$ den reguljära repr.

$$\text{tr}(D_R(e)) = \text{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}\right) = N, \quad \text{tr}(D_R(g)) = \text{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & \\ & \ddots & & & \\ i & 0 & \dots & & \\ & \ddots & & & \\ & & & & \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_g \frac{1}{N} \chi_{D_a}(g^*) \chi_{D_R}(g) = \frac{1}{N} \chi_{D_a}(e) \cdot \chi_{D_R}(e) = \chi_{D_a}(e) = n_a$$

$\Rightarrow D_R$ INNEHÅLLER D_a n_a gånger.

$$\Rightarrow N = m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_m^2.$$

PROJEKTOR. Man kan använda ort. th. för att konstruera en projektor på en viss IRREP D_a :

$$P_a = \frac{n_a}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) D(g)$$

$\uparrow$
 D_a

OM MAN VET KARAKTÄRERNA

OBS: $\chi_{D \oplus D'}(g) = \chi_D(g) + \chi_{D'}(g)$

$$\chi_{D \oplus D'}(g) = \chi_D(g) + \chi_{D'}(g)$$

”RÄCKER FÖR ATT SÖNDERDELA EN REPRESENTATION

OM MAN VET KARAKTÄRERNA

EXEMPLEN FÖR S_3 .

KONJUGAT KLASS.



(1)



(3)



(2)

IRRED.

$D_{\square}$

$D_{\boxplus}$

$D_{\boxminus}$

1	1	1
2	0	-1
1	-1	1

KARAKTER
TABELL

(Hur? Se
övning 14)

(*)

Definierande rep. D_D : $\chi_{D_D}(e) = 3$, $\chi_{D_D}((12)) = 1$, $\chi_{D_D}((123)) = 0$

$$\Rightarrow \chi_{D_D} = \chi_{D_{\square}} + \chi_{D_{\boxplus}} \Rightarrow D_D = D_{\square} \oplus D_{\boxplus}$$

$$\otimes D = D_{\boxplus} \otimes D_{\boxplus} ?$$

$$\chi_D(e) = 2 \cdot 2 = 4 \quad \chi_D((12)) = 0 \cdot 0 = 0 \quad \chi_D((123)) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\Rightarrow \chi_D = \chi_{\boxplus\boxplus} + \chi_{\boxplus} + \chi_{\boxminus} \Rightarrow D = D_{\boxplus\boxplus} \oplus D_{\boxplus} \oplus D_{\boxminus}$$

$$\otimes D = D_D \otimes D_D ?$$

$$\chi_D(e) = 9, \quad \chi_D((12)) = 1, \quad \chi_D((123)) = 0$$

$$\Rightarrow D = 2D_{\boxplus\boxplus} \oplus 3D_{\boxplus} \oplus D_{\boxminus}$$

O.S.V. ...