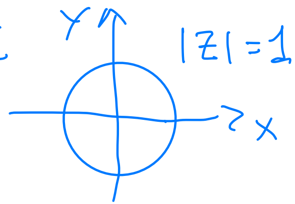
GRUPPTEORI V

Nu går vi vidare till <u>LIE GRUPPER</u>

Ex: ROTATION av en CIRKEL: $z = x + iy$

$\mathbb{C}$ $\quad |z| = 1$

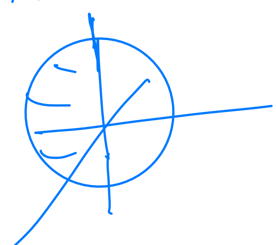


$$z \to e^{i\alpha} z \qquad \alpha \in [0, 2\pi[\text{ fes.}$$

$e^{i\alpha}$ = 1x1 UNITÄRA MATRIS

$U(1)$

Ex: ROTATION av en SFÄR $x^2 + y^2 + z^2 = 1$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

R: 3x3 ORTOGONAL MATRIS MED $\det R = +1$

$SO(3)$.

För ändliga grupper kan vi beskriva den "abstrakta" gruppmultiplikationen med hjälp av en multiplikationstabell:

	e	a_1	$a_2 \dots$
e	e	a_1	a_2
a_1	a_1	$\dots$	$\dots$
a_2	a_2	$\dots$	$\dots$
$\vdots$			

Vi kan inte göra det för en Lie grupp! Det enklaste sättet (fysikernas sätt) är att VÄLJA EN TROGEN REPRESENTATION (DEFINIERANDE REPRESENTATION) och definiera gruppen med den.

Så ... $U(1)$ ÄR gruppen $\{e^{i\alpha},\ \alpha \in [0, 2\pi[$ med multiplic.$\}$

$O(n)$ ÄR gruppen av $n \times n$ ORTOGONALA matriser: $R^T R = R R^T = \mathbb{1}$, $R_{ij} \in \mathbb{R}$

($SO(n) = \{R \in O(n)$ med $\det R = 1\}$)

oftast. men $R_{ij} \in \mathbb{C}$ också funkar.

$U(n)$ ÄR gruppen av $n \times n$ UNITÄRA matriser $U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbb{1}$, $U_{ij} \in \mathbb{C}$

($SU(n) = \{U \in U(n)$ med $\det U = 1\}$)

Men det finns (oändlig många) andra representationer.

DISKRETA GRUPPER V.S. LIE GRUPPER.

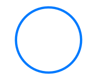
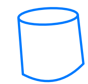
"Ändligt antal element (eller räknebart), verkar på en "diskret" objekt:

$\{a, b, c ..\}$, , $x^5 + 3x^2 - 1 = 0$

Kan beskrivas med en multiplikations tabell

Har ändligt många irreducibla represent.

Kontinuerligt antal element, verkar på en "kontinuerlig" objekt:

, , $y''' + x^2 y' + y = 0$

"Kräver" en matris-beskrivning från början.

Har Oändligt många irreducible represent.

Q: $(\mathbb{R}, +)$ en grupp?

Q: $(\mathbb{R}, +)$ en grupp?

A: JA. (abelsk, såklart).

$0 + x = x + 0 = x$

$x + y \in \mathbb{R}$

$(x+y) + z = x + (y+z)$

$x + (-x) = 0$

Q: $(\mathbb{R}, +)$ en grupp?

A: JA. (abelsk, såklart).

$$0 + x = x + 0 = x$$

$$x + y \in \mathbb{R}$$

$$(x+y)+z = x+(y+z)$$

$$x + (-x) = 0$$

OBS: För abelska grupper använder vi "additiv" notation.

dvs $x+y$ istället för $x \circ y$

$-x$ istället för x^{-1}

Q: $(\mathbb{R}, +)$ en grupp?

A: JA. (abelsk, såklart).

$$0 + x = x + 0 = x$$

$$x + y \in \mathbb{R}$$

$$(x+y)+z = x+(y+z)$$

$$x + (-x) = 0$$

Q: $(\mathbb{R}, \cdot)$ en grupp?

Q: $(\mathbb{R}, +)$ en grupp?

A: JA. (abelsk, såklart).

$$0 + x = x + 0 = x$$

$$x + y \in \mathbb{R}$$

$$(x+y) + z = x + (y+z)$$

$$x + (-x) = 0$$

Q: $(\mathbb{R}, \cdot)$ en grupp?

A: NEJ $\quad e = 1$ här $\quad 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$

MEN 0 har ingen invers!

Vi kan fixa problemet genom att "ta bort" nollelementet: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eller hela icke-positiva delen: $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$.

Q: $(\mathbb{R}, \cdot)$ en grupp?

A: NEJ $\quad e = 1$ här $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$

MEN 0 har ingen invers!

Vi bör kolla att $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$ ÄR grupper! (dvs uppfyller axiomerna)

Vi gör det för

$$SU(n) = \{ U \text{ } n\times n \text{ komplexa matriser: } U^\dagger U = UU^\dagger = 1, \ \det U = 1 \}$$

Vi bör kolla att $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$ ÄR grupper! (dvs uppfyller axiomerna)

Vi gör det för

$$SU(n) = \{ U \text{ } n \times n \text{ komplexa matriser: } U^\dagger U = UU^\dagger = \mathbb{1}, \ \det U = 1 \}$$

$$U, V \in SU(n) \overset{?}{\Longrightarrow} UV \in SU(n)$$

Vi bör kolla att $O(n), SO(n), U(n), SU(n)$ ÄR grupper! (dvs uppfyller axiomerna)

Vi gör det för

$$SU(n) = \{ U \text{ } n \times n \text{ komplexa matriser: } U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbb{1}, \det U = 1 \}$$

$$U, V \in SU(n) \overset{?}{\Longrightarrow} UV \in SU(n)$$

JA

$$(UV)^\dagger UV = V^\dagger U^\dagger U V = V^\dagger V = \mathbb{1}$$

$$\det(UV) = \det U \cdot \det V = 1 \cdot 1 = 1.$$

Vi bör kolla att $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$ ÄR grupper! (dvs uppfyller axiomerna)

Vi gör det för $SU(n) = \{ U \text{ n×n komplexa matriser: } U^\dagger U = UU^\dagger = \mathbb{1},\ \det U = 1 \}$

$$U, V, W \in SU(n) \overset{?}{\Longrightarrow} U(VW) = (UV)W$$

Vi bör kolla att $O(n), SO(n), U(n), SU(n)$ ÄR grupper! (dvs uppfyller axiomerna)

Vi gör det för $SU(n) = \{ U$ $n \times n$ komplexa matriser: $U^\dagger U = UU^\dagger = \mathbb{1}, \det U = 1 \}$

$U, V, W \in SU(n) \overset{?}{\Longrightarrow} U(VW) = (UV)W$

JA Matrismultiplikation är ju ALLTID ASSOCIATIV.

Vi bör kolla att $O(n), SO(n), U(n), SU(n)$ ÄR grupper! (dvs uppfyller axiomerna)

Vi gör det för

$$SU(n) = \{ U \text{ } n\times n \text{ komplexa matriser: } U^\dagger U = UU^\dagger = \mathbb{1}, \det U = 1 \}$$

$\mathbb{1}_{n\times n} \in SU(n)$?

Vi bör kolla att $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$ ÄR grupper! (dvs uppfyller axiomerna)

Vi gör det för

$$SU(n) = \{ U \text{ } n \times n \text{ komplexa matriser: } U^\dagger U = UU^\dagger = \mathbb{1}, \ \det U = 1 \}$$

$$\mathbb{1}_{n\times n} \in SU(n) \ ?$$

JA $\quad \mathbb{1}^\dagger \mathbb{1} = \mathbb{1}\mathbb{1}^\dagger = \mathbb{1}, \quad \det \mathbb{1} = 1.$

Vi bör kolla att $O(n), SO(n), U(n), SU(n)$ ÄR grupper! (dvs uppfyller axiomerna)

Vi gör det för

$$SU(n) = \{ U \ n \times n \text{ komplexa matriser: } U^\dagger U = UU^\dagger = \mathbb{1}, \ \det U = 1 \}$$

$$U \in SU(n) \overset{?}{\Longrightarrow} U^{-1} \in SU(n)$$

Vi bör kolla att $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$ ÄR grupper! (dvs uppfyller axiomerna)

Vi gör det för

$$SU(n) = \{ U \text{ } n\times n \text{ komplexa matriser: } U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbb{1}, \ \det U = 1 \}$$

$$U \in SU(n) \overset{?}{\Longrightarrow} U^{-1} \in SU(n)$$

JA. $U^{-1} = U^\dagger$ och

$$(U^{-1})^\dagger U^\dagger = (U^\dagger)^\dagger U^\dagger = U U^\dagger = \mathbb{1}$$

$$\det(U^{-1}) = \det(U^\dagger) = (\det U)^* = 1^* = 1$$

VIKTIGASTE LIE GRUPPERNA INOM FYSIK:

- $U(1)$ ⟶ gauge invariance för elektromag:
  $\psi \to e^{i\alpha}\psi$ (QED)

- $SU(2)$, $SO(3)$ ⟶ Rörelsemängdmoment, spinn, Rotationsgrupp, $SU(2)$ används också för den elektrosvaga kraften.

- $SU(3)$ ⟶ Kvantkromodynamicen (QCD) också symmetrier av hadroner.

- $SO(3,1)$ ⟶ Lorentz grupp.

(Inom GUT, strängteori förekommer också: $SO(5)$, $SO(10)$, E_6, $SO(32)$, E_8 ...)

Alla Lie Grupper kan beskrives som

$$g(\underbrace{\alpha_1, \ldots \alpha_n}_{\text{kontinuerlige parametrar}}) = g(\vec{\alpha})$$

med :

$$g(\vec{\alpha})\, g(\vec{\beta}) = g(\underbrace{\vec{\gamma}(\vec{\alpha}, \vec{\beta})}_{\text{väldig komplicerede}})$$

väldig komplicerede
(men analytiska, ∞ derivarbare)
funktioner
(Ganska oanvändbart)

Enkelt Exempel: $U(1)$:

$g(\alpha) = e^{i\alpha}$ $\qquad g(\alpha)g(\beta) = e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i\underbrace{(\alpha+\beta)}_{\gamma(\alpha,\beta)}}$.

Om G är inte abelsk $\vec{\gamma} \neq \vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

Mindre lätt exempel: $SU(2)$

$$g = \begin{pmatrix} x+iy & -u+iv \\ u+iv & x-iy \end{pmatrix}$$

med $x^2+y^2+u^2+v^2 = 1$
tvång
$\Rightarrow$ Bara 3 param.

T.ex. $\begin{cases} x = \sin\psi \sin\theta \sin\varphi \\ y = \sin\psi \sin\theta \cos\varphi \\ u = \sin\psi \cos\theta \\ v = \cos\psi \end{cases}$

$g(\psi, \theta, \varphi)$

Och lycka till med $g(\psi,\theta,\varphi) \cdot g(\psi',\theta',\varphi')$!

INGEN gör det på det här sättet.

Hur gör vi då?

Tänk på $e = g(\vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_{n \times n}$

Utveckla $g(\vec{\alpha})$ för $|\vec{\alpha}| \ll 1$:

$$g(\vec{\alpha}) \simeq \mathbb{1} + i\,\alpha^a T^a + \mathcal{O}(\alpha^2)$$

Fysikernes konvention

α^a är reelle parameter (i matte ofte $\in \mathbb{C}$).

T^a är $n \times n$ matriser

$a = 1, 2 \ldots \dim G$ summed

För allmänna $\vec{\alpha}$ sätter vi:

$$g(\vec{\alpha}) = e^{i\alpha^a T^a}$$

Exponent av en matris...

För allmänna $\vec{\alpha}$ sätter vi:

$$g(\vec{\alpha}) = e^{i\alpha^a T^a}$$

Exponent av en matris...

$$e^{M} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{1} + M + \frac{1}{2!}M^2 + \frac{1}{3!}M^3 + \dots$$

(Funkar för alla funktioner $f(z)$ analytiska i $z=0$)

För allmänna $\vec{\alpha}$ sätter vi:

$$g(\vec{\alpha}) = e^{i\alpha^a T^a} \longleftarrow$$ Exponent av en matris...

$$e^M \stackrel{def}{=} \mathbb{1} + M + \frac{1}{2!}M^2 + \frac{1}{3!}M^3 + \dots$$

(Funkar för alla funktioner $f(z)$ analytiska i $z=0$)

Ibland är $M^n = M^{n+1} = \dots = 0$

$$e^{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}} = \mathbb{1} + \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\overset{= 0}{\cancel{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}^2}} + 0\,.$$

$$= \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

För allmänna $\vec{\alpha}$ sätter vi:

$$g(\vec{\alpha}) = e^{i\alpha^a T^a} \longleftarrow$$ Exponent av en matris...

$$e^M \overset{\text{def}}{=} \mathbb{1} + M + \frac{1}{2!}M^2 + \frac{1}{3!}M^3 + \dots$$

(Funkar för alla funktioner $f(z)$ analytiska i $z=0$)

Ibland upprepas mönstret. $\left(\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$

$$e^{\alpha\sigma_x} = \mathbb{1} + \alpha\sigma_x + \frac{1}{2}\alpha^2\sigma_x^2 + \frac{1}{3!}\alpha^3\sigma_x^3 + \frac{1}{4!}\alpha^4\sigma_x^4 + \dots$$

$$= \mathbb{1} + \alpha\sigma_x + \frac{1}{2}\alpha^2\mathbb{1} + \frac{1}{3!}\alpha^3\sigma_x + \frac{1}{4}\alpha^4\mathbb{1} + \dots$$

$$= \operatorname{ch}\alpha\,\mathbb{1} + \sigma_x\operatorname{sh}\alpha = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\alpha & \operatorname{sh}\alpha \\ \operatorname{sh}\alpha & \operatorname{ch}\alpha \end{pmatrix}$$

För allmänna $\vec{\alpha}$ sätter vi:

$$g(\vec{\alpha}) = e^{i\alpha^a T^a}$$ ← Exponent av en matris...

$$e^M \overset{\text{def}}{=} \mathbb{1} + M + \frac{1}{2!}M^2 + \frac{1}{3!}M^3 + \dots$$ (Funkar för alla funktioner $f(z)$ analytiska i $z=0$)

I värsta fall kan man diagonalizera:

$$M = \Omega \Delta \Omega^{-1}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} m_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_n \end{pmatrix}$$

$$e^M = \mathbb{1} + \Omega\Delta\Omega^{-1} + \frac{1}{2}\Omega\Delta\Omega^{-1}\Omega\Delta\Omega^{-1} + \frac{1}{6}\Omega\Delta\Omega^{-1}\Omega\Delta\Omega^{-1}\Omega\Delta\Omega^{-1} + \dots$$

För allmänna $\vec{\alpha}$ sätter vi:

$$g(\vec{\alpha}) = e^{i\alpha^a T^a}$$

Exponent av en matris...

$$e^M \overset{\text{def}}{=} \mathbb{1} + M + \frac{1}{2!}M^2 + \frac{1}{3!}M^3 + \dots$$

(Funkar för alla funktioner $f(z)$ analytiska i $z=0$)

I värsta fall kan man diagonalisera:

$$M = \Omega \Delta \Omega^{-1}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} m_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_n \end{pmatrix}$$

$$e^M = \mathbb{1} + \Omega\Delta\Omega^{-1} + \frac{1}{2}\Omega\Delta\cancel{\Omega^{-1}}\cancel{\Omega}\Delta\Omega^{-1} + \frac{1}{6}\Omega\Delta\cancel{\Omega^{-1}}\cancel{\Omega}\Delta\cancel{\Omega^{-1}}\cancel{\Omega}\Delta\Omega^{-1} + \dots$$

$$= \Omega\left(\mathbb{1} + \Delta + \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{6}\Delta^3 + \dots\right)\Omega^{-1} = \Omega \begin{pmatrix} e^{m_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{m_n} \end{pmatrix} \Omega^{-1}$$

$$g(\vec{\alpha}) = e^{i \underbrace{\alpha^a T^a}}$$

LIE GRUPP

LIE ALGEBRA

(MYCKET ENKLARE!)

$T^1, T^2 \ldots$ kallas för GENERATORER av LIE ALGEBRAN och kan tänkas som en BAS.

$$g(\vec{\alpha}) = e^{i \underbrace{\alpha^a T^a}}$$

LIE GRUPP

LIE ALGEBRA
(MYCKET ENKLARE!)

Hur ser grupp-
multiplikation
ut från Lie
algebras synvinkel ?

$T^1, T^2 \ldots$ kallas för
GENERATORER av
LIE ALGEBRAN och
kan tänkas som
en BAS.

Tillbaka till:

a, b, c ALLTID FÖRST ÅTT Σ

$$e^{i\alpha^a T^a} e^{i\beta^b T^b} = e^{i\gamma^c T^c}$$

Utveckla kring $\mathbb{1}$:

$$\left(\mathbb{1} + i\alpha^a T^a - \frac{1}{2}\alpha^a T^a \alpha^{a'} T^{a'} + \dots\right)\left(\mathbb{1} + i\beta^b T^b - \frac{1}{2}\beta^b T^b \beta^{b'} T^{b'} + \dots\right)$$

$$=$$

$$\mathbb{1} + i(\alpha^a + \beta^a) T^a - \frac{1}{2}\alpha^a \alpha^b T^a T^b - \frac{1}{2}\beta^a \beta^b T^a T^b$$

$$- \alpha^a \beta^b T^a T^b + \dots = \mathbb{1} + i\gamma^a T^a - \frac{1}{2}\gamma^a \gamma^b T^a T^b + \dots$$

$$\cancel{\mathbb{1}} + i(\alpha^a + \beta^a)T^a - \frac{1}{2}\alpha^a\alpha^b T^a T^b - \frac{1}{2}\beta^a\beta^b T^a T^b$$

$$- \alpha^a \beta^b T^a T^b + \dots = \cancel{\mathbb{1}} + i\gamma^a T^a - \frac{1}{2}\gamma^a\gamma^b T^a T^b + \dots$$

Utveckla nu $\gamma^a = \gamma_1^a + \gamma_2^a + \gamma_3^a + \dots$

homogena polynom i $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ av grad 1, 2, 3 ...

$$= i\gamma_1^a T^a + i\gamma_2^a T^a - \frac{1}{2}\gamma_1^a \gamma_1^b T^a T^b + \dots$$

$$\cancel{1} + \underline{i(\alpha^a+\beta^a)T^a} - \frac{1}{2}\alpha^a\alpha^b T^a T^b - \frac{1}{2}\beta^a\beta^b T^a T^b$$

$$- \alpha^a\beta^b T^a T^b + \dots = \cancel{1} + i\gamma^a T^a - \frac{1}{2}\gamma^a\gamma^b T^a T^b + \dots$$

Utveckla nu $\gamma^a = \gamma_1^a + \gamma_2^a + \gamma_3^a + \dots$

homogena polynom i $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ av grad $1, 2, 3 \dots$

$$= \underline{i\gamma_1^a T^a} + i\gamma_2^a T^a - \frac{1}{2}\gamma_1^a\gamma_1^b T^a T^b + \dots$$

$$\Rightarrow \gamma_1^a = \alpha^a + \beta^a$$

$$\cancel{1} + i(\alpha^a + \beta^a)T^a - \frac{1}{2}\alpha^a\alpha^b T^a T^b - \frac{1}{2}\beta^a\beta^b T^a T^b$$
$$- \alpha^a \beta^b T^a T^b + \dots = \cancel{1} + i\gamma^a T^a - \frac{1}{2}\gamma^a\gamma^b T^a T^b + \dots$$

Utveckla nu $\gamma^a = \gamma_1^a + \gamma_2^a + \gamma_3^a + \dots$

homogena polynom i $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ av grad 1, 2, 3 ..

$$= i\gamma_1^a T^a + i\gamma_2^a T^a - \frac{1}{2}(\alpha^a + \beta^a)(\alpha^b + \beta^b)T^a T^b + \dots$$

$$\Rightarrow i\gamma_2^c T^c = -\frac{1}{2}\alpha^a\beta^b(T^a T^b - T^b T^a)$$

$$i\gamma_2^c T^c = -\frac{1}{2}\alpha^a\beta^b\left(T^aT^b - T^bT^a\right)$$

Kan bara fungera om $[T^a, T^b]$ är en lineär kombination av $T^1 \dots T^n$:

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c$$

(summered över c)

Fysikernas konvention

STRUKTUR KONSTANTER

$$\Rightarrow \cancel{i}\,\underline{\underline{\gamma_2^c}}\, T^c = \underline{-\frac{1}{2}\alpha^a\beta^b \cdot \cancel{i} f^{abc}}\, T^c$$

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c$$

är den DEFINIERANDE RELATION i en LIE ALGEBRA.

Om vi har en mängd matriser

$$\{T^1, T^2, \dots T^N\},$$ som uppfyller

för vissa f^{abc}, har vi ALLT VI BEHÖVER (nästan ...., se skillnaden mellan SU(2) och SO(3) ...)

$U(n)$ $\quad g = e^{i\alpha^a T^a} = e^{iA}$

Båda g och A är $n \times n$ matriser.

$$g^\dagger = g^{-1} \iff A^\dagger = A$$ Mycket enklare.

Bevis: $\quad g^\dagger = e^{-iA^\dagger}, \quad g^{-1} = e^{-iA}$

SU(n)

$$g = e^{i\alpha^a T^a} = e^{iA}$$

$g \in U(n)$ som förr, men

också:

$$\det g = 1 \iff \operatorname{tr} A = 0$$ ← Mycket enklare.

Bevis Låt $A = \Omega \Delta \Omega^\dagger$, $\Delta = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$ diagonal.

$$g = \Omega \begin{pmatrix} e^{ia_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{ia_n} \end{pmatrix} \Omega^\dagger, \quad \det g = \det\left(\cancel{\Omega} \begin{pmatrix} e^{ia_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{ia_n} \end{pmatrix} \cancel{\Omega^\dagger}\right)$$

$$= e^{ia_1} \cdots e^{ia_n} = e^{i(a_1 + \cdots + a_n)} = e^{i \operatorname{tr} A}$$

$O(n)$

$$g = e^{i\alpha^a T^a} = e^{iA}.$$

Båda g och A är $n \times n$ matriser.

g reella tal $\iff$ A imaginära tal.

$$g^T = g^{-1} \iff A^T = -A$$

$SO(n)$

$$g = e^{i\alpha^a T^a} = e^{iA}.$$

$g \in O(n)$ men också:

$$\det g = 1 \iff \operatorname{tr} A = 0$$

$U(n)$: $g^\dagger g = g g^\dagger = \mathbb{1}$

$SU(n)$: $g^\dagger g = g g^\dagger = \mathbb{1}$ och $\det g = 1$

$O(n)$: $g_{ij} \in \mathbb{R}$, $g^T g = g g^T = \mathbb{1}$

$SO(n)$: $g_{ij} \in \mathbb{R}$, $g^T g = g g^T = \mathbb{1}$ och $\det g = 1$

$U(n)$: $g^\dagger g = g g^\dagger = \mathbb{1}$

$SU(n)$: $g^\dagger g = g g^\dagger = \mathbb{1}$ och $\det g = 1$

$O(n)$: $g_{ij} \in \mathbb{R}$, $g^T g = g g^T = \mathbb{1}$

$SO(n)$: $g_{ij} \in \mathbb{R}$, $g^T g = g g^T = \mathbb{1}$ och $\det g = 1$

Q : SANT eller FALSK ?

$SU(n) \subset U(n)$

$O(n) \subset U(n)$

$O(n) \subset SU(n)$

$SO(n) \subset O(n)$

$U(n)$: $g^\dagger g = g g^\dagger = \mathbb{1}$

$SU(n)$: $g^\dagger g = g g^\dagger = \mathbb{1}$ och $\det g = 1$

$O(n)$: $g_{ij} \in \mathbb{R}$, $g^T g = g g^T = \mathbb{1}$

$SO(n)$: $g_{ij} \in \mathbb{R}$, $g^T g = g g^T = \mathbb{1}$ och $\det g = 1$

Q : SANT eller FALSK ?

$SU(n) \subset U(n)$ S

$O(n) \subset U(n)$ S

$O(n) \subset SU(n)$ F

$SO(n) \subset O(n)$ S