SU(2): Leta efter 2×2, spårlösa hermitska matriser.

$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Pauli Matriser.

(Man använder oftast $\tau^a = \frac{1}{2}\sigma^a$)

$$[\tau^a, \tau^b] = i\epsilon^{abc}\tau^c \quad \Big(\sum_c \text{ förstått}\Big)$$

$\epsilon^{123} = 1$, total antisymmetrisk

är då SU(2)s STRUKTURKONSTANTER.

SO(3) Leta efter 3×3 spårlösa antisymmetriska matriser med imaginära koefficienter:

$$T^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^3 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

OBSERVERA: $[T^a, T^b] = i\epsilon^{abc}T^c$

$\Rightarrow$ SU(2) och SO(3) har SAMMA LIE ALGEBRA

SO(3) Leta efter 3×3 spårlösa antisymmetriska matriser med imaginära koefficienter:

$$T^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^3 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

OBSERVERA: $[T^a, T^b] = i\epsilon^{abc}\, T^c$

$\Rightarrow$ SU(2) och SO(3) har SAMMA LIE ALGEBRA

Q: ÄR DE SAMMA GRUPP?

SU(2) och SO(3) har SAMMA LIE ALGEBRA

Q: ÄR DE SAMMA GRUPP?

SU(2) och SO(3) har SAMMA LIE ALGEBRA

Q: ÄR DE SAMMA GRUPP?

A: Nej! Testa $\alpha^1 = \alpha^2 = 0$, $\alpha^3 = \alpha \neq 0$.

$$SU(2): \quad e^{i\alpha\tau^3} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha = 2\pi} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -e \neq e$$

$$SO(3): \quad e^{i\alpha T^3} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha = 2\pi} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e$$

SKILLNADEN ÄR VÄLDIGT VIKTIGT FÖR FYSIKER!

UNDER en 2π rotation

$$\mathbb{E} = \begin{pmatrix} E_x(\mathbb{r}) \\ E_y(\mathbb{r}) \\ E_z(\mathbb{r}) \end{pmatrix} \quad (\text{eller } \mathbb{B})$$

$$\mathbb{E} \longrightarrow + \mathbb{E} \quad (\text{VEKTOR})$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{up}(\mathbb{r}) \\ \Psi_{down}(\mathbb{r}) \end{pmatrix}$$

$$\Psi \longrightarrow - \Psi \quad (\text{SPINOR})$$

(OBS: Sannolikhetstätheten $|\Psi|^2 \longrightarrow + |\Psi|^2$)

Observera också att i kvantmekanik

$$[x^i, p^j] = i\delta^{ij} \qquad (\hbar = 1).$$

Om man definierar

$$L^i = \epsilon^{ijk} x^j p^k$$

Samma strukturkonstant

$$\Rightarrow \quad [L^i, L^j] = i\epsilon^{ijk} L^k$$

Därför L^i är också generatorer av SU(2) ("$\infty \times \infty$ matriser")

Också:

$$\tau^i = \left\{ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \underline{\tau^i \tau^i} = \frac{3}{4} \cdot \mathbb{1}_{2\times 2},$$

$$T^i = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \underline{T^i T^i} = 2 \cdot \mathbb{1}_{3\times 3}$$

$$L^i = \{ yp_z - zp_y,\ zp_x - xp_z,\ xp_y - yp_x \} \Rightarrow \underline{L^i L^i} = \ell(\ell+1)\mathbb{1}$$

$$\forall \ell = 0, 1, 2, 3 \dots$$

KALLAS

CASIMIR OPERATOR

Också:

$$\tau^i = \left\{ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \underline{\tau^i \tau^i} = \frac{3}{4} \cdot \mathbb{1}_{2\times 2},$$

$$T^i = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \underline{T^i T^i} = 2 \cdot \mathbb{1}_{3\times 3}$$

$$L^i = \{ yp_z - zp_y,\ zp_x - xp_z,\ xp_y - yp_x \} \Rightarrow \underline{L^i L^i} = \ell(\ell+1)\mathbb{1}$$

Vi måste tänka mer systematiskt...

KALLAS CASIMIR OPERATOR

IRREPS av SU(2):

SU(2) Lie Algebran definieras som:

$$[J^i, J^j] = i\epsilon^{ijk} J^k$$

Vi vill hitta alla ändliga matriser som uppfyller den och inte kan skrivas som

$$\left(\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$$

(dvs irreducibla)

Vi redan har 3 lösningar:

$J^i = 0$, $J^i = \frac{1}{2}\sigma^i = \tau^i$, $J^i = T^i \leftarrow$ 3x3 matriser

Vi skriver $[J_x, J_y] = iJ_z$ & cykliskt.

(D.v.s $J^1 = J_x$, $J^2 = J_y$, $J^3 = J_z$, hermiterska)

Definiera: $\mathbb{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$

$$J_+ = J_x + iJ_y$$

$$J_- = J_x - iJ_y$$

$\mathbb{J}^2$ KOMMUTERAR MED ALLT: J_x, J_y, J_z, J_+, J_-

$[J_+, J_-] = 2J_z$, $[J_z, J_+] = J_+$, $[J_z, J_-] = -J_-$

Diagonalisera samtidigt: $\mathbf{J}^2$, J_z

$$\mathbf{J}^2 |a,m\rangle = a|a,m\rangle \qquad J_z|a,m\rangle = m|a,m\rangle$$

OBS:
$$J_z \underbrace{J_\pm |a,m\rangle} = (m \pm 1) \underbrace{J_\pm |a,m\rangle}$$
$$\mathbf{J}^2 \underbrace{J_\pm |a,m\rangle} = a \underbrace{J_\pm |a,m\rangle}$$

$$\Rightarrow \quad J_\pm |a,m\rangle = C_{a,m} |a, m \pm 1\rangle$$

men proportionalitetskonstanten kan vara NOLL...

$$\langle a, m | \underbrace{J^2 - J_z^2}_{\parallel} | a m \rangle = (a - m^2) \underbrace{\langle a, m | a, m \rangle}_{=1} \geq 0 .$$

$$J_x^2 + J_y^2 = \frac{1}{2}(J_+ J_- + J_- J_+) \quad \text{positiv.}$$

$\Longrightarrow$ $\forall a$, $\exists\, m_{max}$ och m_{min} så att:

$$J_+ | a, m_{max} \rangle = 0 \qquad J_- | a, m_{min} \rangle = 0$$

$$\Downarrow$$

$$J_- J_+ | a, m_{max} \rangle = 0 \qquad J_+ J_- | a, m_{min} \rangle = 0$$

$$(J^2 - J_z^2 - J_z) | a, m_{max} \rangle = 0 \qquad (J^2 - J_z^2 + J_z) | a, m_{min} \rangle = 0$$

$$\Longrightarrow a = m_{max}(m_{max} + 1) \qquad \Longrightarrow a = m_{min}(m_{min} - 1)$$

$$m_{max}(m_{max}+1) = a = m_{min}(m_{min}-1).$$

Två lösningar: $m_{max} = -m_{min}$

$\cancel{m_{max} = m_{min} - 1}$ oacceptabel.

Vi vet också att J_+ ökar $m \mapsto m+1$

$\Rightarrow \exists\, n$ så att $m_{max} = m_{min} + n$

$$m_{max}(m_{max}+1) = a = m_{min}(m_{min}-1).$$

Två lösningar: $\underline{m_{max} = -m_{min}}$ oacceptabel,

$$\cancel{m_{max} = m_{min} - 1}$$

Vi vet också att J_+ ökar $m \mapsto m+1$

$\Rightarrow \exists\, n$ så att $\underline{m_{max} = m_{min} + n}$

$$\Longrightarrow m_{max} = \frac{n}{2} \overset{\text{def.}}{=} j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$$

$$a = j(j+1)$$

Istället för att skriva $|j(j+1), m\rangle$

skriver man bara $|j, m\rangle$ $\quad j \equiv$ SPINN

$$J^2 |j, m\rangle = j(j+1) |j\, m\rangle \qquad j = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \ldots$$

$$J_z |j, m\rangle = m |j, m\rangle \qquad m = -j, -j+1, \ldots, j$$

Vi kan också normera alla tillstånd:

$$J_+ \underbrace{|j, m\rangle}_{\text{anta normerat}} = C_+ |j, m+1\rangle$$

$$|C_+|^2 = \langle jm | J_- J_+ | jm\rangle = \langle jm | J^2 - J_z^2 - J_z | jm\rangle = j(j+1) - m(m+1)$$

$$\Rightarrow C_+ = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} \qquad \left(C_- = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} \right)$$

$\forall j \quad [J_x, J_y] = i J_z$, & cykelsk. J_i är $(2j+1)\times(2j+1)$ hermitska spårlösa matriser.

!

$J^2 = j(j+1)\times \mathbb{1}$, $\quad J_z = \begin{pmatrix} j & & & & 0 \\ & j-1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -j+1 & \\ 0 & & & & -j \end{pmatrix}$

Eg: $j=0$: $\quad J_i^0 = 0$

$j=\frac{1}{2}$: $\quad J_i^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$j=1$: $\quad J_i^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\vdots$

$L_i = J_i^0 \oplus J_i^1 \oplus J_i^2 \oplus \cdots$ reducerbar MED BARA HELTALSSPINN!

Ofta behöver vi kombinera två (eller fler) partiklar i en sammansatt system.

Det betyder att vi måste

1. KOMBINERA TVÅ IRREPS
2. DELA UPP PRODUKTEN i IRREPS.

Addition av rörelsemängdmoment

Anta nu att vi har TVÅ PARTIKLAR med spinn $= j_1, j_2$: $\mathcal{H}_{j_1}$, $\mathcal{H}_{j_2}$

$2j_1+1$ dim. $\qquad$ $2j_2+1$ dim.

$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2}$ beskriver det kombinerade systemet.

$$\dim \mathcal{H} = \dim \mathcal{H}_{j_1} \cdot \dim \mathcal{H}_{j_2} = (2j_1+1)\cdot(2j_2+1)$$

Vi kan visa att $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{|j_1-j_2|} \oplus \mathcal{H}_{|j_1-j_2+1|} \oplus \cdots \mathcal{H}_{j_1+j_2}$

$$\mathbb{J} = \mathbb{J}_1 \otimes \mathbb{1}_2 + \mathbb{1}_1 \otimes \mathbb{J}_2$$

(fysiker skriver bara $\mathbb{J} = \mathbb{J}_1 + \mathbb{J}_2$)

OBS: $+$, INTE $\oplus$

$\mathcal{H}_{j_1}$	$\mathcal{H}_{j_2}$
$\|j_1, j_1\rangle$	$\|j_2, j_2\rangle$
$\|j_1, j_1-1\rangle$	$\|j_2, j_2-1\rangle$
$\vdots$	$\vdots$
$\|j_1, -j_1\rangle$	$\|j_2, -j_2\rangle$

TÄNK PÅ j_1 och j_2 SOM FIXERADE.

Vi vill utrycka $|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$ i termer av $|j, m\rangle$ bas för J

Tydligen, den "högsta" m ges av:

$$|j, j\rangle = |j_1, j_1\rangle \otimes |j_2 j_2\rangle$$

Därför att:

$$J_z |j, j\rangle = (j_1 + j_2)|j, j\rangle \Rightarrow m_{\text{högst}} = j_1 + j_2$$

Nu kan vi verka på $|jj\rangle$ med J_- :

$$J_-|j,j\rangle = \sqrt{2j}\,|j,j-1\rangle = \sqrt{2j_1}\,|j_1,j_1-1\rangle|j_2 j_2\rangle + \sqrt{2j_2}\,|j_1,j_1\rangle|j_2,j_2-1\rangle$$

Den $\perp$ kombinationen

$$\sqrt{2j_2}\,|j_1,j_1-1\rangle|j_2,j_2\rangle - \sqrt{2j_1}\,|j_1,j_1\rangle|j_2,j_2-1\rangle$$

måste vara $\propto |j-1,j-1\rangle$ $\Rightarrow$

... Upprepa hela vägen till $j=|j_1-j_2|$

(Clebsch – Gordan coeff.)