SU(3)

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Gell-Mann matriser. Man brukar ta

$$T^a = \frac{1}{2}\lambda_a$$

Man kan beräkna $[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c$

$$f^{123} = f^{231} = f^{312} = -f^{132} \dots = +1$$

$$f^{147} = f^{471} = \dots = \frac{1}{2} \dots$$

...

Ett enkelt sätt att beräkna f^{abc} när man ha alla T^a:

OBS: $\operatorname{tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$.

$$[T^a, T^b] = i f^{abd} T^d$$

$$[T^a, T^b] T^c = i f^{abd} T^d T^c$$

$$\operatorname{tr}([T^a, T^b] T^c) = i f^{abd} \operatorname{tr}(T^d T^c) = \frac{1}{2} i f^{abd} \delta^{dc}$$

$$= \frac{1}{2} i f^{abc}$$

$T^a = \frac{1}{2}\lambda^a$ är då en **3** dim IRREP av SU(3).

($T^a = 0$ är alltid en icke trogen, (trivial) **1** dim IRREP.)

Q: Finns det en 2 dim IRREP?

$T^a = \frac{1}{2}\lambda^a$ är då en **3** dim IRREP av SU(3).

($T^a = 0$ är alltid en icke trogen, (trivial) **1** dim IRREP.)

Q: Finns det en 2 dim IRREP?

A: Nej. Det finns inte tillräckligt många (8) 2×2 matriser!

Q: Finns det andra (icke ekvivalenta)
3 dim IRREPS ?

Q: Finns det andra (icke ekvivalenta) **3** dim IRREPS?

A: Ja. $\tilde{T}^a = -T^{a*}$ är en representation: $\mathbf{\bar{3}}$

$$[\tilde{T}^a, \tilde{T}^b] = [T^{a*}, T^{b*}] = [T^a, T^b]^*$$

$$= (if^{abc} T^c)^* = -if^{abc} T^{c*} = +if^{abc} \tilde{T}^c$$

och det är inte samma för att T^8 och $\tilde{T}^8$ har olika egenvärden.

För SU(3) använder fysiker en notation som skiljer mellan index upp och ner.

Låt $g \in SU(3)$ GRUPP element.

Som matris: $g^{i=1,2,3}_{j=1,2,3}$ rows columns

En vektor $v^i \in \mathbb{C}^3$ transformeras:

$$v^i \longrightarrow g^i_j v^j$$

3

$$v^i \longrightarrow g^i{}_j\, v^j \quad \left(= (gv)^i\right)$$

$\Longrightarrow$ $$v^{i*} \longrightarrow (g^i{}_j)^* \, v^{j*}$$

3

DEF: $$\bar{v}_i = v^{i*}$$

$\Longrightarrow$ $$\bar{v}_i \longrightarrow g^{\dagger j}{}_i \, \bar{v}_j$$

$$= \bar{v}_j \, g^{\dagger j}{}_i \quad \left(= (\bar{v} g^\dagger)_i\right)$$

Den generaliseras till fler index:

$$V^{i}{}_{jk} \longrightarrow g^{i}{}_{m}\, g_{j}{}^{\dagger l}\, g_{k}{}^{\dagger n}\, V^{m}{}_{ln}.$$

OBS: $\delta^{i}{}_{j}$, ϵ^{ijk} och ϵ_{ijk} är

INVARIANTA TENSORER:

t.ex $\underline{\underline{\delta^{i}{}_{j}}} \longrightarrow g^{i}{}_{k}\, g_{j}{}^{\dagger l}\, \delta^{k}{}_{l} = g^{i}{}_{k}\, g^{\dagger k}{}_{j} = \underline{\underline{\delta^{i}{}_{j}}}$

Q: Visa att ϵ^{ijk} är invariant.

d.v.s. $\epsilon^{ijk} \to \epsilon'^{ijk}$:

Q: visa att ϵ^{ijk} är invariant.

d.v.s. $\epsilon^{ijk} \longrightarrow \epsilon^{ijk}$:

A: $\epsilon^{ijk} \longrightarrow g^i_{\ell}\, g^j_m\, g^k_n\, \epsilon^{\ell m n} = ?$

Q: visa att ϵ^{ijk} är invariant.

d.v.s. $\epsilon^{ijk} \longrightarrow \epsilon^{ijk}$:

A: $\epsilon^{ijk} \longrightarrow g^i_l \, g^j_m \, g^k_n \, \epsilon^{lmn} =$

$$= \underbrace{\det g}_{=1} \epsilon^{ijk} = \epsilon^{ijk}$$

Det här är viktigt för att bygga invarianta kombinationer av vektorer och tensorer.

T.ex: $v^i w^j z^k \epsilon_{ijk} = S$ är invariant: $\underline{\underline{S}} \to g^i{}_e v^e g^j{}_m w^m g^k{}_n z^n \epsilon_{ijk}$

$$= g^i{}_e g^j{}_m g^k{}_n \epsilon_{ijk} v^e w^m z^n$$

$$= \epsilon_{emn} v^e w^m z^n = \underline{\underline{S}}$$

Flera IRREPS:

För ALLA LIE ALGEBROR G, $(\dim G = N)$

finns det en N dim IRREP.:

den ADJUNGERADE REPRESENTATIONEN

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c$$

$$[T^a[T^b T^c]] + [T^b[T^c T^a]] + [T^c[T^a, T^b]] =$$

$$= -\left(f^{bcd} f^{ade} T^e + (a \to b \to c \to a) + (a \to c \to b \to a) \right)$$

$$\Rightarrow f^{bcd} f^{ade} + \dots = 0$$

JACOBIS IDENTITET.

Jacobis id. kan tolkas så här:

$$(T^a)^b{}_c = -i f^{abc}$$

ÄR en $N \times N$ representation! (För SU(3), $N = 8$).

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c \Leftrightarrow f \text{ uppfyller Jacobi.}$$

För SU(n) den enkleaste sätt för att bygga alla IRREP. är att använda

TENSOR NOTATION.

Låt $A_{ij} = -A_{ji}$ och $S_{ij} = +S_{ji}$

$(i, j = 1, 2, 3 \dots n)$

Under SU(3): $A_{ij} \longrightarrow g_i^{\ k} g_j^{\ l} A_{kl}$ också antisymm.

$S_{ij} \longrightarrow g_i^{\ k} g_j^{\ l} S_{kl}$ också symmetrisk.

$\Rightarrow$ Det finns en $\frac{n(n+1)}{2}$ och en $\frac{n(n-1)}{2}$ IRREP.

OBS: För SU(3) den ANTISYMMETRISKA IRREP har dim $= \frac{3\cdot(3-1)}{2} = 3$:

$$A_{ij} = \epsilon_{ijk} V^k \qquad \mathbf{\bar{3}}$$

Medan S_{ij} har 6 komp: $\mathbf{6}$ (och $\mathbf{\bar{6}}$)

$S_{11}, S_{12}, S_{13},$
S_{22}, S_{23}, S_{33}

$\mathbf{1, 3, \bar{3}, 6, \bar{6}, 8, 10, \overline{10}}$ är de minsta, och mest använda IRREPS:

$$3 \otimes 3 = \bar{3} \oplus 6 : \quad a_i b_j = \frac{1}{2}\left(a_i b_j - a_j b_i\right) \qquad \bar{3}$$

$$+ \frac{1}{2}\left(a_i b_j + a_j b_i\right) \qquad 6$$

$$3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8 \quad a_i b^j = \left(a_i b^j - \frac{1}{3}\delta_i^j a_k b^k\right) \qquad 8$$

$$+ \frac{1}{3}\delta_i^j a_k b^k \qquad 1$$