

GREEN FUNKTIONER.

$$\frac{1}{2}|x|, \frac{1}{2\pi} \log \frac{\rho}{\rho_0}, -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{r}$$

är exempel av
GREENFUNKTIONER, en
mycket användbar metod
för att:

LÖSA LINJÄRA ICKE HOMOGENA

DIFF. EKVATIONER:

$$\mathcal{L} \psi = \bar{J}$$

OKÄND
FUNKTION

"KÄLLA"

(med visse
randvillkoren)

$$\mathcal{L}(\alpha \psi_1 + \beta \psi_2) = \alpha \mathcal{L} \psi_1 + \beta \mathcal{L} \psi_2$$

DIFFERENTIAL
OPERATOR.

MEST ANVÄNDA : $(\nabla^2 = \frac{d^2}{dx^2})$ 1D $(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$ 2D $(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})$ 3D.
P D E

$$\mathcal{L} = \nabla^2 \quad (\text{Laplace / Poisson})$$

$$\mathcal{L} = \nabla^2 - \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial t} \quad (\text{Diffusion / Värme})$$

$$\mathcal{L} = \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (\text{Våg})$$

Man kan också lägga till en konstant

$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \text{konst}$ (Helmholtz, Yukawa, Klein Gordon...)
eller en hel funktion $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + V(x)$ (Schrödinger...)

Betrakta $L_{\mathbb{X}} \varphi(\mathbb{X}) = J(\mathbb{X})$

där $J(\mathbb{X})$ är en känd "källa"
och $L_{\mathbb{X}}$ en av diff. op. ovan.

VI VILL LÖSA FÖR φ .

GREENFUNCTION METHOD:

Lös $L_{\mathbb{X}} G(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \delta(\mathbb{X} - \mathbb{Y})$
en gång för alla.

$$\Rightarrow \varphi(\mathbb{X}) = \int G(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) J(\mathbb{Y}) d^n \mathbb{Y}.$$

Bevis

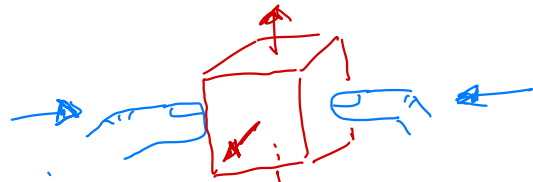
ANTAGANDE

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x G(x, y) = \delta^{(n)}(x - y) \\ \varphi(x) = \int G(x, y) f(y) d^n y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{L}_x \varphi(x) &= \int \mathcal{L}_x G(x, y) f(y) d^n y \\ &= \int \delta^{(n)}(x - y) f(y) d^n y \\ &= f(x) \end{aligned} \quad \checkmark$$

OBS.

1) G kan vara en matris :



$$\psi_i(r, t) = \int dr' dt' G_{ij}(r, t; r', t') J_j(r', t')$$

RESPONSE

Energi
Magnetisering
Strömmen.
Förflyktning

GREENFUNCTION

Spec. värme
susceptibilitet
konduktivitet
elasticitet

STÖRNING

Temperatur
Mag. fält
Spänning
Kraft

2) Om problemet är rum/tid translations-

invariant : $G(x, y) = G(x - y)$

och man löser $\int_{\mathbb{R}^n} G(x) = \delta^{(n)}(x)$.

$$\dim \nabla^2 = 1$$

2

3

$$\Delta^2$$

$$\nabla^2 - \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$\frac{1}{2} x $	$\frac{1}{2\pi} \log \frac{\rho}{\rho_0}$	$-\frac{1}{4\pi} \frac{1}{r}$
$-\sqrt{\frac{k}{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4kt}} \Theta(t)$	$-\frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{\rho^2}{4kt}} \Theta(t)$	$-\frac{1}{\sqrt{k}(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{r^2}{4kt}} \Theta(t)$
$\frac{-v}{2} \Theta(t - \frac{ x }{v})$	$\frac{-v \Theta(t - \frac{\rho}{v})}{2\pi \sqrt{v^2 t^2 - \rho^2}}$	$-\frac{\delta(t - \frac{r}{v})}{4\pi r}$

Nämen va' bra! Har vi löst alla sådana
ekvationer?

1) Man måste fortfarande göra integralen
 $\int G(x-y)F(y)dy$. (Analytiskt eller numeriskt)

2) $\psi(x)$ måste uppfylla önskade
randvillkoren. Lägg till tillämplig
lösning av den homogena ekv.
 $L\psi = 0$. (Vanliga metoder: separation
av variabler ...)