

RESPONS FUNKTIONER och ANALYTICITET.

En ofta förekommande tillämpning är :

$$r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{G(t-t')}_{\text{TIDS-TRANSLATION INVARIANT}} \underbrace{s(t')}_{\text{STÖRNING}} dt'$$

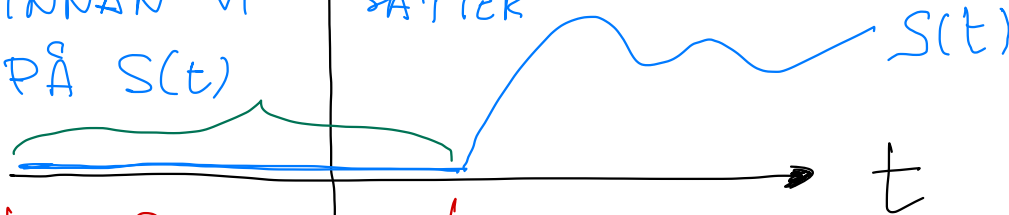
RESPONS-
FUNKTION

TID

TIDS-TRANSLATION
INVARIANT

GREEN FUNKTION

$r(t)$ SKA VARA NOLL
INNAN VI SÄTTER
PÅ $s(t)$



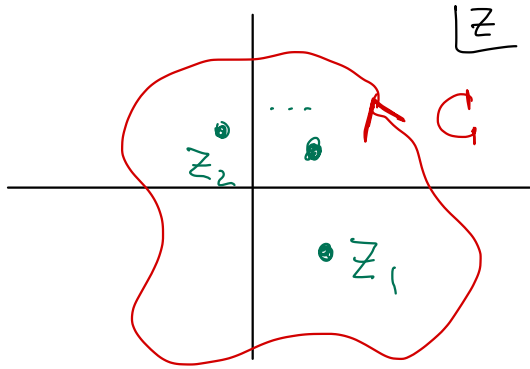
KAUSALITET!

$$\Rightarrow G(z) = 0 \text{ för } z < 0$$

KAUSALITET & ANALYTICITET
är nära släkt!

Vi kommer ofta att använda ofta:

RESIDUE SATS:



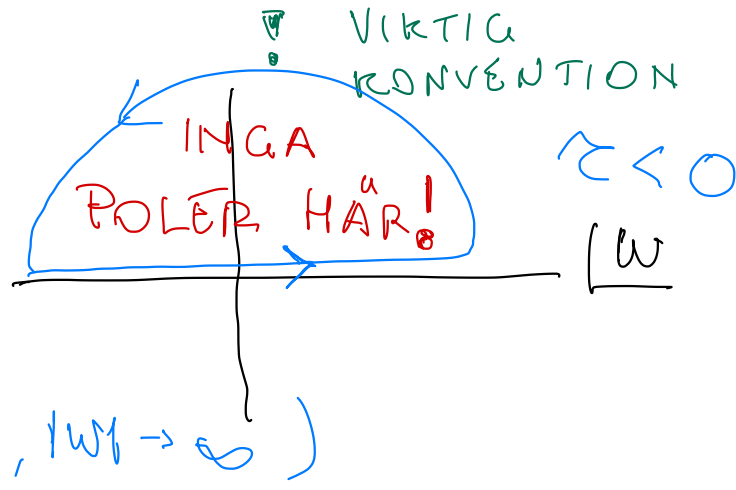
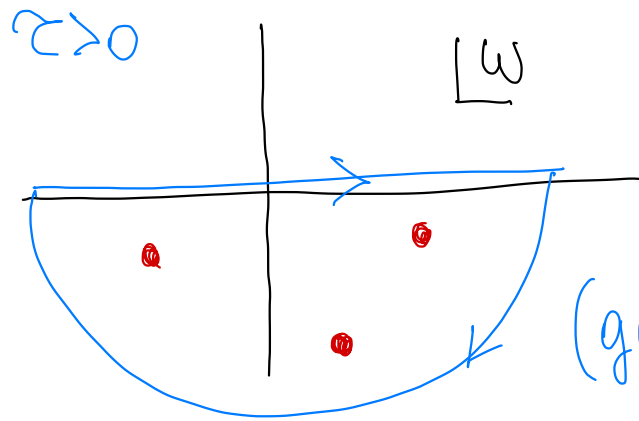
$$\oint_C f(z) = 2\pi i \sum \text{Res}(z_i)$$

$$f(z) = \dots + \frac{\text{Res}(z_i)}{z - z_i} + \dots$$

En GREENFUNKTION som uppfyller
randvillkor : $G(\tau < 0) = 0$ kallas

RETARDERAD GREENFUNKTION.

Låt $G(\tau) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dw}{2\pi} e^{-i\omega\tau} g(w)$



Ex: Driven oscillator:

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = F(t).$$

Greenfunktion:

$$\frac{d^2}{dt^2} G(t) + \omega_0^2 G(t) = \delta(t)$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} g(\omega)$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \cdot \frac{1}{-i\omega t}$$

$$\Rightarrow (-\omega^2 + \omega_0^2) g(\omega) = 1 \Rightarrow G(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Nämnaren

$$G(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \frac{1}{\underbrace{\omega^2 - \omega_0^2}_{g(\omega)}}$$

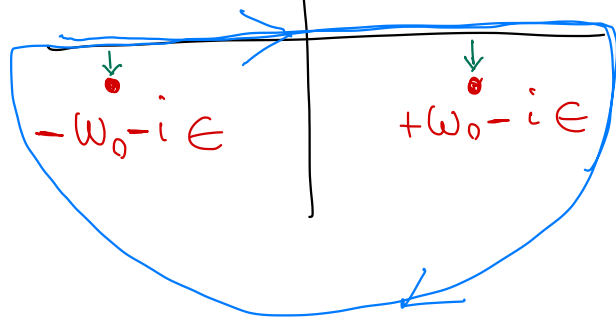
är singulär i $\omega = \pm \omega_0$.

! Att $g(\omega)$ är singulär någonstans på $\mathbb{R}$ är ett ofta förekommande fall. Men vi vet hur vi ska hantera problemet:

Betrakta $g(\omega)$ som en DISTRIBUTION

$$g(\omega) \longrightarrow g_\epsilon(\omega)$$

INGA POLER
HÄR



kontoret
väljs för $t > 0$
Så att $\int_{\gamma} \rightarrow 0$.

$$G(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \frac{-1}{(\omega - (-w_0 - i\epsilon))(\omega - (w_0 - i\epsilon))}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}(-2\pi i) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{e^{-i(-w_0 - i\epsilon)t}}{-w_0 - i\epsilon - w_0 + i\epsilon} + \frac{e^{-i(w_0 - i\epsilon)t}}{w_0 - i\epsilon - (-w_0 - i\epsilon)} \right)$$

$$G(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \frac{-1}{(\omega - (-\omega_0 - i\epsilon))(\omega - (\omega_0 - i\epsilon))} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}(-2\pi i) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{e^{-i(-\omega_0 - i\epsilon)t}}{-\omega_0 - i\epsilon - \omega_0 - i\epsilon} + \frac{e^{-i(\omega_0 - i\epsilon)t}}{\omega_0 - i\epsilon - (-\omega_0 - i\epsilon)} \right) =$$

$$= i \left(\frac{e^{i\omega_0 t}}{-2\omega_0} + \frac{e^{-i\omega_0 t}}{2\omega_0} \right) = \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0}$$

$$\Rightarrow G(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} & t > 0 \end{cases} = \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} \Theta(t)$$

Koll:

$$G(t) = \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} \Theta(t)$$

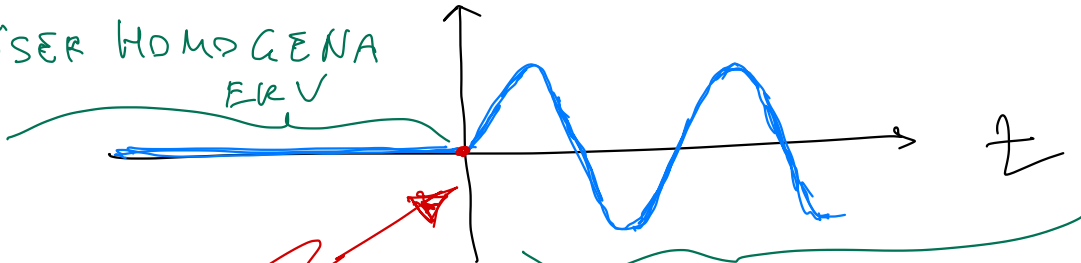
$$G'(t) = \cos \omega_0 t \Theta(t) + \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} \delta(t)$$

$$G''(t) = -\omega_0 \sin \omega_0 t \Theta(t) + \underbrace{\cos \omega_0 t}_{=1} \delta(t)$$

$$\Rightarrow G''(t) + \omega_0^2 G(t) = \delta(t)$$

OK.

LÖSER HOMOGENA
ERV

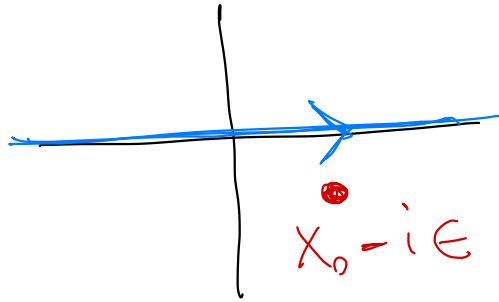


KINK

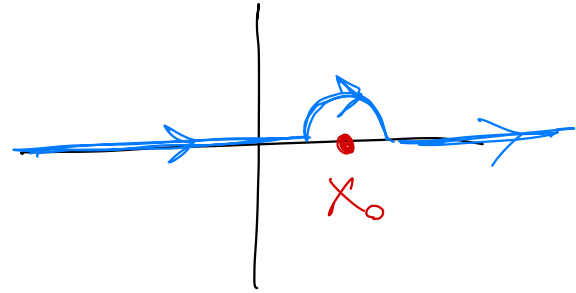
LÖSER HOMOGENA ERV.

"Feynman's"

IDENTITY:



$=$



$$= \mathcal{P}\left(\frac{1}{x-x_0}\right) - i\pi \delta(x-x_0)$$

$$\frac{1}{x-x_0+i\epsilon}$$

(-)

$$\int_{\mathbb{R}} dx \frac{\varphi(x)}{x-x_0+i\epsilon}$$

$$= \int_{-\infty}^{-\epsilon} dx \frac{\varphi(x)}{x-x_0} + \int_{+\epsilon}^{+\infty} dx \frac{\varphi(x)}{x-x_0} + \int_{\text{med}} dz \frac{\varphi(z)}{z-x_0}$$

(med urs)

KRAMERS-KRONING

RELATIONERNA;

Låt $F(z)$ vara en funktion $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

• ANALYTISKT i ÖVRE HALVPLANET (d.v.s INGA
POLER)

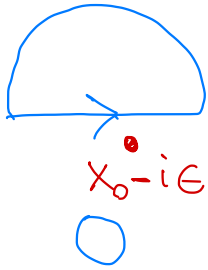
• $|F(z)| \sim O\left(\frac{1}{z^2}\right)$ i ÖVRE HALVPLANET

$$F(x_0) = \frac{-i}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{F(x)}{x - x_0}$$

$$(x_0 \in \mathbb{R})$$

Beweis:

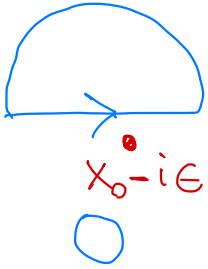
Via Feynman's identity.



$$\begin{aligned} &= \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} \\ &= \mathcal{P} \int dx \frac{F(x)}{x - x_0} - i\pi F(x_0) + 0 \end{aligned}$$

Vänta lite! Vad händer om vi tar
 $x_0 + i\epsilon$ istället?

FÖRE:

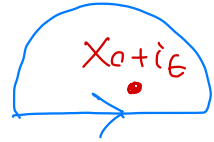


$$x_0 - i\epsilon$$

$$= \text{diagram} + \text{diagram} + \text{diagram}$$

$$= \oint dx \frac{F(x)}{x - x_0} = i\pi F(x_0) + 0$$

Nu:



$$x_0 + i\epsilon$$

$$= \text{diagram} + \text{diagram} + \text{diagram}$$

$$= \oint dx \frac{F(x)}{x - x_0} + i\pi F(x_0) + 0$$

$$2\pi i F(x_0)$$

Det blir samma sak!

Tillbaka till $G(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} g(\omega).$

ofta uppfyller $g(\omega)$ antaganden i

Kramers-Kronings Sats:

- Analytisk i $\text{Im } \omega > 0$
- $g(\omega) \rightarrow 0$ tillräckligt snabbt.
 $|\omega| \rightarrow \infty$
(Om inte, kan man
"subtrahera" $g(\omega) - a - \frac{b}{\omega} \dots$)

- Men också: $G(t) \in \mathcal{R} \Rightarrow \underline{g(\omega)^* = g(-\omega)}$
INTE $g!$

$$\Rightarrow g(\omega) = \underbrace{\chi_1(\omega)}_{\text{j\u00e4mn funkt.}} + i \underbrace{\chi_2(\omega)}_{\text{odd funktion.}}$$

$$g(\omega) = \frac{-i}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{g(\omega')}{\omega' - \omega} \Rightarrow$$

$$\chi_1(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi_2(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \left(\int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty} \right) \frac{\chi_2(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'$$

$$= \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{\chi_2(-\omega')}{-\omega' - \omega} d\omega' + \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{\chi_2(\omega)}{\omega' - \omega} d\omega' =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\omega' \chi_2(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \quad (\text{Liknande ber\u00e4kning f\u00f6r } \chi_2(\omega))$$

$$g(\omega) = \chi_1(\omega) + i \chi_2(\omega)$$

$$\chi_1(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi_2(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\omega' \chi_2(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

$$\chi_2(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi_1(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = -\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\omega \chi_1(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

Kallas för KRAMER-KRONINGS
RELATIONERNA.

Återigen: Antagande: $G(t) \in \mathbb{R}$, $g(\omega)$ analytisk + $O(\frac{1}{\omega^2})$
i ÖVRE HALVPLANET.

Om man mäter, (eller beräkna) X_1
(eller X_2), kan man härleda X_2
(eller X_1). Notera också att man
inte kan ha t.ex. $X_2 = 0$ överallt,
för att det tvingar $X_1 = 0$ också.

EXEMPEL DEN REFRAKTIVA INDEXEN.

$$n(\omega) = \chi_1(\omega) + i \chi_2(\omega)$$

(def:

$$k(\omega) \left(\equiv \frac{2\pi}{\lambda(\omega)} \right) = n(\omega) \cdot \frac{\omega}{\underline{\underline{c}}} = n(\omega) k_{\text{vakuum.}} \quad \underline{\underline{=}}$$

$$E(x, t) = E_0 \operatorname{Re} \left(e^{i k(\omega) x - \omega t} \right) =$$

$$= E_0 e^{\overset{\rightarrow \chi_2(\omega) k_{\text{vac}} x}{\uparrow}} \cos \left(\underset{\uparrow}{\chi_1(\omega) k_{\text{vac}} x - \omega t} \right)$$

ABSORPTION DISPERSION.