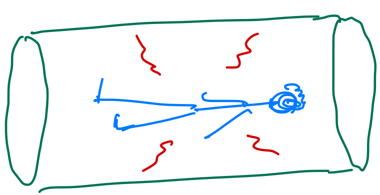
INTEGRALEKVATIONER.

Tidigare, i $\psi(x) = \int G(x,y)\, J(y)\, dy$ betraktade vi J som KÄND och vi ville härleda ψ. Men ofta är det TVÄRTOM!

Ex: vi mäter $\psi = \mathbb{E}, \mathbb{B}$ och vill ta reda på strömmen J som orsakar dem.



$\psi = \int G J$ kallas då för en INTEGRALEKVATION

4 KLASSISKA TYPER AV INTEGRALEKVATIONER

	FÖRSTA TYPEN	ANDRA TYPEN
FREDHOLM	$f(x) = \int_a^b K(x,y)\,\varphi(y)\,dy$	$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)\,\varphi(y)\,dy$
VOLTERRA	$f(x) = \int_a^x K(x,y)\,\varphi(y)\,dy$	$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,y)\,\varphi(y)\,dy$

(KERNEL)

K, f KÄNDA, φ OKÄND, $\lambda \in \mathbb{C}$ varieras

(man kan ta $a = 0$ eller $-\infty$, $b = 1$ eller $+\infty$)

Observera att om $K(x,y)=0$ för $x<y$

$$\int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy = \int_a^x K(x,y)\varphi(y)\,dy$$

Fredholm $\longrightarrow$ Volterra.

(enklare, därför det finns metoder som fungerar för Volterra bara).

Ibland kan man skriva en diff ekv som en int. ekv. (oftast VOLTERRA) och tvärtom!

Ex: Skriv
$$\begin{cases} y'(x) = Q(x)\,y(x) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$
som en integralekvation.

Ibland kan man skriva en diff ekv som en int. ekv. (oftast VOLTERRA) och tvärtom!

Ex: Skriv $\begin{cases} y'(x) = a(x)\,y(x) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ som en integralekvation.

$$\int_0^x y'(z)\,dz = \int_0^x a(z)\,y(z)\,dz$$

Ibland kan man skriva en diff ekv som en int. ekv. (oftast VOLTERRA) och tvärtom!

Ex: Skriv $\begin{cases} y'(x) = a(x)\,y(x) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ som en integralekvation.

$$\int_0^x y'(z)\,dz = \int_0^x a(z)\,y(z)\,dz$$

$$y(x) = y_0 + \int_0^x a(z)\,y(z)\,dz$$

VÄLDIG ENKEL KERNEL, OBEROENDE AV X.

INBYGGDA RANDVILLKOREN

Det är INTE en "lösning" därför att y finns på båda sidor

En FREDHOLMS ekv. av FÖRSTA TYPEN:

$$f(x) = \int_a^b K(x,y)\,\varphi(y)\,dy$$

(nu okänd)

är i grund och botten inversen av

$$\mathcal{L}_x f(x) = \varphi(x)$$

Så om man hittar en diff operator $\mathcal{L}$ som har K som GREENFUNKTION:

$$\mathcal{L}_x K(x,y) = \delta(x-y)$$

Då är problemet löst:

$$\mathcal{L}_x f(x) = \int_a^b \mathcal{L}_x k(x,y)\,\varphi(y)\,dy =$$

$$= \int_a^b \delta(x-y)\,\varphi(y)\,dy = \varphi(x) \qquad (x \in [a,b])$$

" $\mathcal{L} = K^{-1}$ " som $\infty \times \infty$ matriser.

Problemet kan ofta behandlas numeriskt.

Hur? $\quad f(x) = \int_a^b K(x, y)\, \varphi(y)\, dy$

Välj en KOMPLETT ORTOGONAL BAS av funktioner i $[a, b]$ (underförstådd)

dvs: $\{ e_n(x), \quad \int e_n^*(x)\, e_m(x)\, dx = \delta_{mn} \}$

Skriv $\quad f(x) = f_n\, e_n(x)$ ("$\sum_n$" underförstått)

$$\varphi(y) = \varphi_m\, e_m(y)$$

Obs $\quad f_k = \int e_k^*(x)\, f(x)\, dx$

$$f(x) = \int K(x-y)\,\varphi(y)\,dy$$

$$f_n e_n(x) = \varphi_m \int K(x-y)\,e_m(y)\,dy$$

$$\underbrace{\int e_p^*(x)\, f_n e_n(x)\,dx} = \varphi_m \underbrace{\int e_p^*(x) \int K(x-y)\,e_m(y)\,dy\,dx}$$

$$f_n \delta_{np} \equiv f_p \quad = \quad \varphi_m \qquad K_{pm} = K_{pm}\,\varphi_m$$

$$\Rightarrow \varphi_m = K^{-1}_{mp} f_p \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = K^{-1}_{mp} f_p\, e_m(x)$$

Att ha en KOMPLETT ORTOGONAL BAS är VÄLDIGT ANVÄNDBART för att man kan förvandla diff operatorer och distributioner till (OÄNDLIGA) MATRISER:

T.ex.:
$$\delta(x-y) = \sum_n e_n^*(y)\, e_n(x)$$

Att ha en KOMPLETT ORTOGONAL BAS är VÄLDIGT ANVÄNDBART för att man kan förvandla diff operatorer och distributioner till (OÄNDLIGA) MATRISER:

T.ex: $$\delta(x-y) = \left(\sum_n\right) e_n^*(y)\, e_n(x)$$

Bevis: $$\psi(x) = \psi_n e_n(x) \Rightarrow \psi_n = \int e_n^*(y)\,\psi(y)\,dy$$

$$\Rightarrow \psi(x) = \int \underbrace{e_n^*(y)\, e_n(x)}\, \psi(y)\,dy$$

$$= \quad \delta(x-y)$$

T.o.m. GREENFUNKTIONER!

Anta att $\mathcal{L}$ är en diff. operator (t.ex. en observabel i QM).

Anta att vi kan DIAGONALISERA $\mathcal{L}$ (d.v.s. hitta en bas $\mathcal{L}_x e_n(x) = \lambda_n e_n(x)$)

$\Rightarrow$ GREENFUNKTIONEN för $\mathcal{L}$ kan skrivas:

$$G(x-y) = \sum_n \frac{1}{\lambda_n} e_n^*(y)\, e_n(x)$$

GREENFUNKTIONEN för $\mathcal{L}$ kan skrivas:

$$G(x-y) = \sum_n \frac{1}{\lambda_n} e_n^*(y)\, e_n(x)$$

Bevis: $\mathcal{L}_x G(x-y) = \sum_n \frac{1}{\lambda_n} e_n^*(y)\, \mathcal{L}_x e_n(x) =$

$$= \sum_n \frac{1}{\cancel{\lambda_n}} e_n^*(y) \cdot \cancel{\lambda_n} e_n(x) = \delta(x-y)$$

Q: Vad gör vi om några $\lambda_n = 0$?

Här presenteras två metoder för att lösa FREDHOLMS EKV. av ANDRA TYPEN., som förekommer ofta i hållfasthetslära eller spridningsteori.

1 NEUMANNSERIE (VI FYSIKER SÄGER BORN SERIE).

2 SEPARABEL KERNEL.

1: NEUMANN (eller BORN) SERIE.

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)\varphi(y)$$

FREDHOLM II TYPEN.

ANTA λ LITET OCH UTVECKLA I EN TAYLOR SERIE.

$$\varphi_0(x) = f(x)$$

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)\,\varphi_0(y)\,dy =$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)\,f(y)\,dy.$$

$$\varphi_0(x) = f(x)$$

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)\,\varphi_0(y)\,dy =$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)\, f(y)\,dy.$$

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)\,\varphi_1(y)\,dy =$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)\left(f(y) + \lambda \int_a^b K(y,z)\, f(z)\,dz \right) dy =$$

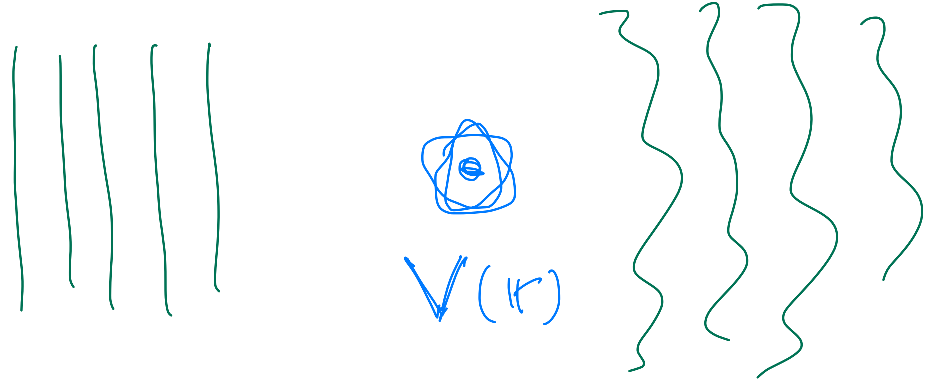
$$= f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y) f(y)\,dy + \lambda^2 \int_a^b \int_a^b K(x,y)\,K(y,z)\, f(y)\, f(z)\,dy\,dz$$

Spoiler Allert!

I de flesta intressanta fysikaliska tillämpningen utvecklingen i λ KONVERGERAR INTE!

Men det är lugnt! Vi tänker på den som en ASYMPTOTISK SERIE.

VIKTIGT FYSIKEXEMPEL: SPRIDNING. (KVANT.)



$\psi(\mathbf{r})$

(tidsoberoende "stationär")

1) Anta att V är "litet"

2) Vi vill lösa för ψ under randvillkoren

$$\psi(\mathbf{r}) \longrightarrow e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad \text{när } V \longrightarrow 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_{\mathbf{r}}^2\psi(\mathbf{r})+V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})=E\psi(\mathbf{r})$$

$\Downarrow$ enkel omskrivning.

$$(\nabla_{\mathbf{r}}^2+k^2)\psi(\mathbf{r})=\frac{2m}{\hbar^2}V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})$$

$$\Big/\!\!\Big/\ k^2=\frac{2mE}{\hbar^2}\ \Big/\!\!\Big/$$

Ex: $\mathbf{k}=(k,0,0)$ om man väljer den inkommande vågen längs $\hat{x}$.

Observera att:

$$(\nabla_{\mathbf{r}}^2+k^2)\,G(\mathbf{r})=\delta(\mathbf{r})$$

$$G(\mathbf{r})=-\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}$$

GREENFUNKTION av ∇^2+k^2.

$$\Rightarrow \quad \psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \frac{2m}{\hbar^2}\int G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,V(\mathbf{r}')\,\psi(\mathbf{r}')$$

"KÄLLAN" BEROR PÅ ψ

d.v.s. INTE EN LÖSNING.

Men: $\psi_0(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$

$$\psi_1(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \frac{2m}{\hbar^2}\int G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,V(\mathbf{r}')\cdot \overbrace{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}^{=\psi_0(\mathbf{r})}$$

$$\vdots$$

$$\psi_n(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \frac{2m}{\hbar^2}\int G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,V(\mathbf{r}')\,\psi_{n-1}(\mathbf{r}')$$

$$\vdots$$

Mer explicit, till första ordningen har vi den så kallade BORNAPPROXIMATIONEN

$$\psi(\mathbf{r}) \approx e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} V(\mathbf{r}') e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} d\mathbf{r}'$$

Om V är begränsat när ogige, för $r \gg r'$;

$$\psi(\mathbf{r}) \approx e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{e^{ikr}}{r} \cdot \underbrace{\int V(\mathbf{r}') e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} d\mathbf{r}'}_{\text{FOURIER TRANSFORM AV } V(\mathbf{r})}$$

Q: VISA ATT: $\left(\nabla^2 + k^2\right)\left(-\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\right) = \delta^3(\mathbf{r}).$

Notera först att för $r \neq 0$: 1 3D

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\left(-\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\right) = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r^2}\partial_r r^2 \partial_r + k^2\right)\frac{e^{ikr}}{r} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left(\underbrace{\frac{1}{r}\partial_r^2 r}_{1\ 3D} + k^2\right)\frac{e^{ikr}}{r} = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r}\partial_r^2 e^{ikr} + k^2\frac{e^{ikr}}{r}\right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r}(ik)^2 e^{ikr} + k^2\frac{e^{ikr}}{r}\right) = 0$$

Ok.

$$\int (\nabla^2 + k^2)\left(-\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\right)\varphi(\mathbb{r})\, d^3\mathbb{r} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int \left\{ \nabla\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\cdot\nabla\varphi(\mathbb{r}) - k^2\frac{e^{ikr}}{r}\varphi(\mathbb{r}) \right\} d^3\mathbb{r} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int \left\{ \partial_r\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\partial_r\varphi(\mathbb{r}) - k^2\frac{e^{ikr}}{r}\varphi(\mathbb{r}) \right\} r^2 dr\, d^2\Omega =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int \left\{ \frac{ikr e^{ikr} - e^{ikr}}{r^2}\partial_r\varphi(\mathbb{r}) - k^2\frac{e^{ikr}}{r}\varphi(\mathbb{r}) \right\} r^2 dr\, d^2\Omega$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int \left\{ (ikr-1)e^{ikr}\partial_r\varphi(\mathbb{r}) - k^2 r\varphi(\mathbb{r})\, e^{ikr} \right\} dr\, d^2\Omega$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int \left\{ (ikr-1)\, e^{ikr}\, \partial_r \varphi(r) - k^2 r\, \varphi(r)\, e^{ikr} \right\} dr\, d^2\Omega$$

$$= \frac{1}{4\pi} \cdot 4\pi \Big[(ikr-1)\, e^{ikr}\, \varphi(r) \Big]_{r=0}^{r=+\infty}$$

$$- \frac{1}{4\pi}\int \cancelto{0}{(ik + k^2 r - ik - k^2 r)}\, e^{ikr}\, \varphi(r)\, dr\, d\Omega^2 = \varphi(0).$$

2: SEPARABEL KÄRNAN.

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)\varphi(y)\,dy.$$

ANTA ATT $$k(x,y) = \sum_{j=1}^{n} M_j(x) N_j(y).$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} M_j(x) \int_a^b N_j(y)\varphi(y)\,dy$$

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} M_j(x) \int_a^b N_j(y)\varphi(y)\,dy$$

Multiplicera allt med $N_k(x)$ och integrera i dx:

$$\underbrace{\int_a^b N_k(x)\varphi(x)\,dx}_{c_k} = \underbrace{\int_a^b N_k(x) f(x)\,dx}_{\substack{b_k \\ (\text{KÄNDA})}} + \lambda \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\int_a^b N_k(x) M_j(x)\,dx}_{\substack{a_{kj} \\ (\text{KÄNDA})}} \underbrace{\int_a^b N_j(y)\varphi(y)\,dy}_{c_j}$$

$$c_k = b_k + \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{kj} c_j$$

är en ändlig matris ekvation!

Om vi löser för c_j får vi då:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} M_j(x) \underbrace{\int_a^b N_j(x)\varphi(x)\,dx}_{c_j}$$

$$= f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} M_j(x) c_j$$

och problemet är löst.

$$c_k = b_k + \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{kj} c_j$$

kan skrivas som $\underbrace{(\mathbb{1} - \lambda A)}_{}C = B$

INVERTERBAR om $\det(\mathbb{1} - \lambda A) \neq 0$

dvs $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ UTOM n lösningar

av $\det(\mathbb{1} - \lambda A) = 0$.

$\Rightarrow$ FÖR VARJE $\lambda \in \mathbb{C}$ ANTINGEN HAR DEN INHOMOGENA (dvs $f \neq 0$) EN UNIK LÖSNING ELLER HAR DEN HOMOGENA ($f = 0 \Rightarrow B = 0$) EN ICKE TRIVIAL (d.v.s $\neq 0$) LÖSNING

(KALLAS "FREDHOLMALTERNATIVET.)