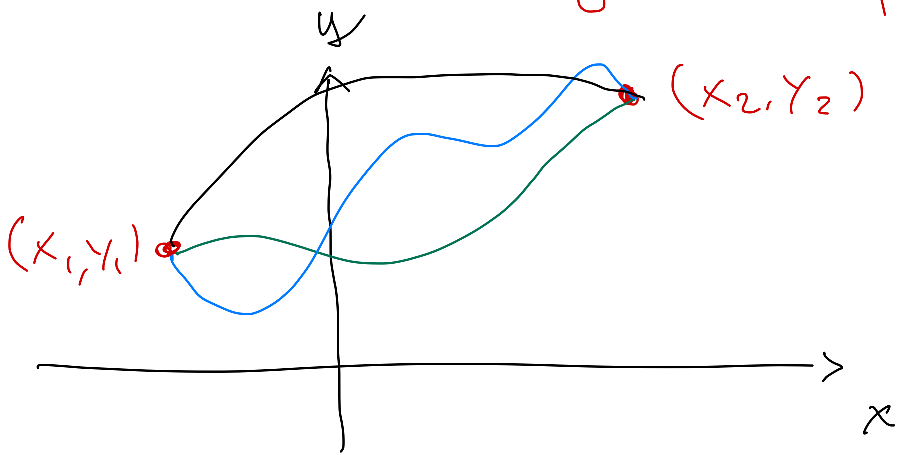
VARIATIONSKALKYL

Det vanligaste problemet i variationskalkyl är när man har en integral som beror på en okänd funktion $y(x)$ och man vill hitta $y(x)$ som minimera/maximera/extremisera den

$$S[y] = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{L\big(y(x), y'(x), x\big)}^{L \text{ är en VANLIG FUNKTION av 3 VARIABLER}} dx$$

S kallas FUNTIONAL (Funktion av en funktion)

Ofta vill vi hitta extremum bara bland alla y som delar samma randvillkoren: $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$.



Fysiker brukar BORTSE från att noggrant specificera alla regularitetsvillkoren och anta att funktionerna är "TILLRÄCKLIGT SNÄLLA"

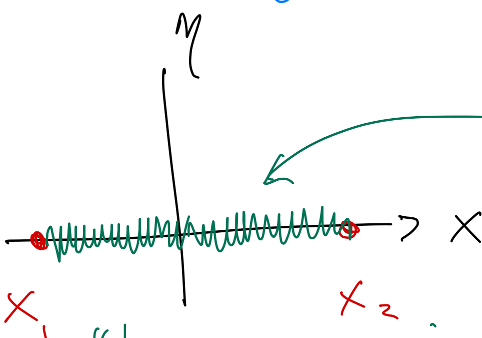
$$S[y] = \int_{x_1}^{x_2} L(y(x), y'(x), x)\,dx$$

Anta att $y_0(x)$ är en lösning.

Låt $y(x) = y_0(x) + \eta(x)$

$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$

"liten" och "snäll"



liten men inte snäll (dvs $|\eta'|$ kan vara stor)

"typ: $\epsilon \sin\frac{x}{\epsilon}$"

$$S[y_0+\eta] = \int_{x_1}^{x_2} L[y_0(x)+\eta(x), y_0'(x)+\eta'(x), x]\,dx \simeq$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{ L(y_0(x), y_0'(x), x) + \frac{\partial L}{\partial y}(y_0(x), y_0'(x), x)\cdot\eta(x) + \frac{\partial L}{\partial y'}(y_0(x), y_0'(x), x)\,\eta'(x) \right\} dx$$

Med $\dfrac{\partial L}{\partial y}$ och $\dfrac{\partial L}{\partial y'}$ menas bara den vanliga partiella derivata av L med avseende på den första eller andra variabeln.

$$S[y_0+\eta] = \int_{x_1}^{x_2} L\left[y_0(x)+\eta(x),\, y_0'(x)+\eta'(x),\, x\right] dx \simeq$$

$$\int_{x_1}^{x_2}\left\{ L\left(y_0(x), y_0'(x), x\right) + \frac{\partial L}{\partial y}\left(y_0(x), y_0'(x), x\right)\cdot \eta(x) + \frac{\partial L}{\partial y'}\left(y_0(x), y_0'(x), x\right)\eta'(x)\right\} dx + \mathcal{O}(\eta^2)$$

FÖRKORTNING

$$= S[y_0] + \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial L}{\partial y}\eta + \frac{\partial L}{\partial y'}\eta'\right) dx + \mathcal{O}(\eta^2)$$

$$= S[y_0] + \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial L}{\partial y}\eta + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\eta\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)\eta\right) dx + \mathcal{O}(\eta^2)$$

$$= \left[\frac{\partial L}{\partial y'}\eta\right]_{x_1}^{x_2} = 0$$

$$S[y_0+\eta] = S[y_0] + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} \right) \eta \, dx + \mathcal{O}(\eta^2)$$

Vi vill att ska vara stationärt i y_0

d.v.s. $S[y_0+\eta] - S[y_0] = \mathcal{O}(\eta^2)$ för ALLA η

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}}_{\text{Båda } \frac{\partial L}{\partial y} \text{ och } \frac{\partial L}{\partial y'} \text{ evaluerede i } (y_0(x),\, y_0'(x),\, x)} = 0$$

EULER EKVATION.

VI MÅSTE KOLLA OM y_0 ÄR EN MIN/MAX/EXTREMUM

Ex fråm MEKANIK: $y(x) \longrightarrow x(t)$ (Man använder ofta $q(t)$)

$$S[x] = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) - V(x(t), t)\right)}_{L[\dot{x}, x, t]} dt$$

VERKAN

LAGRANGIANAN.

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = -\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0$$

$$\Rightarrow m\ddot{x}(t) = -\frac{\partial V}{\partial x}(x(t), t)$$

NEWTONS EKVATION.

Q: Vad händer om $L = L(y, \cancel{y'}, x)$?

Q: Vad händer om $L = L(y, \cancel{y'}, x)$?

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = 0$$

A: Triviaet: $\frac{\partial L}{\partial y'} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow$

$(*)$ $\frac{\partial L}{\partial y}(y, x) = 0$ är en implicit funkt. $y = y(x)$

dvs $\forall x$ finn y så att $(*)$

Q: Vad händer om $L = L(\cancel{y}, y', x)$?

Q: Vad händer om $L = L(\cancel{y}, y', x)$?

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = 0$$

A: $\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \implies \frac{\partial L}{\partial y'} = \text{konstant}$. (Bevarad storhet)

Ex: $L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(\cancel{x}, t)$

$\implies p = m\dot{x} = \text{konstant}$

Q: Vad händer om $L = L(y, y', \cancel{x})$?

Q: Vad händer om $L = L(y, y', \cancel{x})$?

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = 0$$

A: $H = y' \dfrac{\partial L}{\partial y'} - L = \text{konst.}$

Bevis

$$\frac{dH}{dx} = y'' \frac{\partial L}{\partial y'} + y' \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{dL}{dx} =$$

$$= \cancel{y'' \frac{\partial L}{\partial y'}} + \cancel{y' \frac{\partial L}{\partial y}} - \cancel{\frac{\partial L}{\partial y'} y''} - \cancel{\frac{\partial L}{\partial y} y'} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial x}}_{0} = 0$$

Ex: $L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x, \cancel{t})$

$$\Downarrow$$

$$H = \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L = \dot{x}(m\dot{x}) - \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x)\right)$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x)$$ Energi.

Generalisering till $L(y, y', y'', \ldots, x)$,

med $y(x_0) = y_0^{(0)}$, $y'(x_0) = y_0^{(1)}$, $y''(x_0) = y_0^{(2)} \ldots$

$y(x_1) = y_1^{(0)}$, $y'(x_1) = y_1^{(1)}$, $y''(x_1) = y_1^{(2)} \ldots$

(behövs sällan ...):

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial L}{\partial y''} - \frac{d^3}{dx^3}\frac{\partial L}{\partial y'''} + \cdots = 0$$

Generalisering till fler

beroende och oberoende variabler

$$\phi^i(t,x,y,z) \longleftarrow \text{ETT "FÄLT"}$$

<u>Def</u>: $x^0 = t,\ x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z.$

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

$$S = \int d^4x \, \mathcal{L}(\underbrace{\phi^1, \phi^2, \ldots \phi^n, \partial_0\phi^1, \ldots \partial_3\phi^1, \partial_0\phi^2, \ldots \partial_3\phi^2, \ldots \partial_0\phi^n \ldots \partial_3\phi^n}_{\text{ALLA ÄR FUNKTIONER AV } x^0x^1x^2x^3.}, x^0, x^1, x^2, x^3)$$

När vi varierar med ϕ^i FIXERADE på randen av integrationsdomän får vi:

$\forall i = 1, 2, \ldots m$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} - \partial_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi^i)} - \partial_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_1 \phi^i)} - \partial_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_2 \phi^i)} - \partial_3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_3 \phi^i)} = 0$$

Ex: $\phi(\cancel{t}, x, y, z)$ ⟵ Elektrostatisk potential.

$\mathbb{E} = -\nabla\phi$, $\mathcal{E} = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_D \mathbb{E}^2 \, d^3\mathbb{r}$ ⟵ DOMÄN i $\mathbb{R}^3$

Elektriskt fält

elektrostatiska energin

$$\mathcal{E}[\phi] = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_D (-\nabla\phi)^2 \, d^3\mathbb{r}.$$

MINIMERA $\mathcal{E}$ med specifierad randvillkor $\phi|_{\partial D}$

$$\Longrightarrow \quad \nabla \cdot \nabla\phi = \nabla^2\phi = 0$$

$$\phi|_{\partial D}(\mathbb{r}) = \text{givet}.$$

VARIATIONSKALKYL MED TVÅNG.

PROBLEM: Hitta EXTREMVÄRDEN för

$$S = \int_{x_1}^{x_2} L(y(x), y'(x), x)\, dx$$

GIVET ETT TVÅNG.

$$\int_{x_1}^{x_2} G(y(x), y'(x), x)\, dx = K \quad \text{KONSTANT.}$$

INTRODUCERA en LAGRANGEMULTIPLIKATOR λ (konstant)

och hitta extremvärden för

$$\hat{S} = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ L(y(x), y'(x), x) + \lambda\, G(y(x), y'(x), x) \right\} dx.$$

Vi kan också tänka på ett tvång

$$G(y(x), y'(x), x) = K \quad \text{KONSTANT } \forall x$$

ingen integration!

I så fall: LAGRANGEMULTIPLIKATORN λ

en funktion av x (vi behöver en $\forall x$)

$$\hat{S} = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ L(y(x), y'(x), x) + \lambda(x) G(y(x), y'(x), x) \right\} dx$$

Generalisering av funktional begreppet

Observera att

$$S[y] = \int_I \underbrace{L(y(x), y'(x), x)}_{\text{LOKAL (alla i } x)} dx$$

INTEGRAL

är av ett mycket speciellt slag.

$$I[y] = \int y(x)\, y'(x+7)\, dx$$ eller

$$J[y] = y^2(4) + y'(5)$$ är också FUNKTIONALER.

Vi inför begreppet av FUNKIONAL DERIVATA genom att jämföra med fallet av en ändlig antal oberoende variabler:

Låt $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ vara en (derivarbart) funktion.

$$f(x_1+\eta_1, x_2+\eta_2, \ldots, x_n+\eta_n) - f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

$$\simeq \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \eta_i$$

PRAKTISKT SÄTT ATT BESKRIVA EN PARTIAL DERIVATA

För en FUNKIONAL:

$$S[y+\eta] - S[y] = \int \underbrace{\frac{\delta S}{\delta y(x)}}_{\text{FUNKTIONAL DERIVATA}} \eta(x)\,dx$$

summan ersätts av integralen

$\Rightarrow$ Om $S[y] = \int L(y(x), y'(x), x)\,dx$

$$\frac{\delta S}{\delta y(x)} = \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}\Bigg|_{y(x),\,y'(x),\,x}$$

$\Rightarrow$ $\frac{\delta S}{\delta y(x)} = 0$ beskriver EULER-LAGRANGE EKVATIONEN

Q: Låt $I[y] = y^2(1)$

beräkna $\dfrac{\delta I}{\delta y(x)}$

Q: Låt $I[y] = y^2(1)$

beräkna $\dfrac{\delta I}{\delta y(x)}$

A: $I[y+\eta] - I[y] = \left(y(1)+\eta(1)\right)^2 - y(1)^2$

$\simeq 2y(1)\eta(1) = \int 2y(x)\delta(x-1)\eta(x)\,dx$

$$\Rightarrow \frac{\delta I}{\delta y(x)} = 2y(x)\delta(x-1) = 2y(1)\delta(x-1)$$