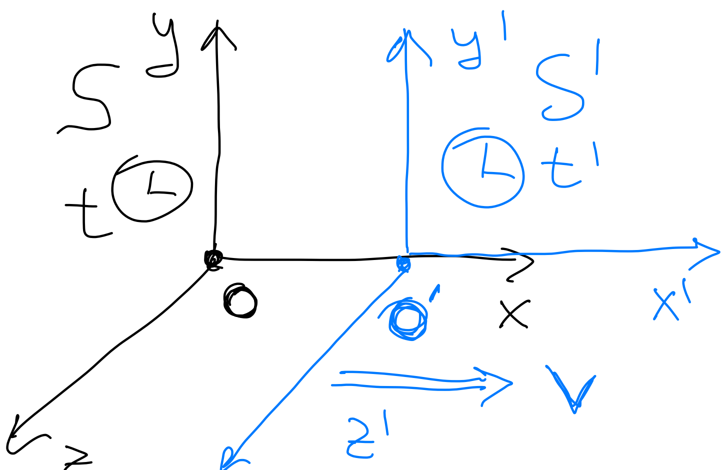
SPECIELL RELATIVITETSTEORI I

Def: INERTIALSYSTEM: Ett referenssystem där TRÖGHETSLAGEN gäller:

FRIA PARTIKLAR RÖR SIG MED KONSTANT (VEKTOR)HASTIGHET.



GALILEITRANSFORMATION

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

GALILEITRANSFORMATIONEN LÄMNAR TRÖGHETSLAGEN OFÖRÄNDRAD:

$$x' = x - vt \Rightarrow u' = u - v \Rightarrow a' = a$$

d.v.s. ett system som rör sig med konstant hastighet v relativt ett inertial-system är OCKSÅ ett inertialsystem

MEN $x' = x - vt$ ÄNDRAR MAXWELLS EKV.

t.ex. ljusets hastigheten är inte samma:

$$c' = c - v$$

GALILEITRANSFORMATIONEN LÄMNAR TRÖGHETSLAGEN OFÖRÄNDRAD:

$$x' = x - vt \Rightarrow u' = u - v \Rightarrow a' = a$$

dvs. ett system som rör sig med konstant hastighet v relativt ett inertial-system är OCKSÅ ett inertialsystem

MEN $x' = x - vt$ ÄNDRAR MAXWELLS EKV.

t.ex. ljusets hastigheten är inte samma:

$$c' = c - v$$

Däremot misslyckades experiment att mäta skillnaden

1905: EINSTEINS POSTULAT:

1) ALLA FYSIKLAGAR ÄR SAMMA I ALLA INERTIALSYSTEM.

2) LJUSHASTIGHETEN I VAKUUM ÄR ALLTID $= c$ I ALLA INERTIALSYSTEM.

$$\cancel{\begin{aligned} x' &= x - vt \\ t' &= t \end{aligned}} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \end{aligned}$$

GALILEITRANSF. LORENTZTRANSF.

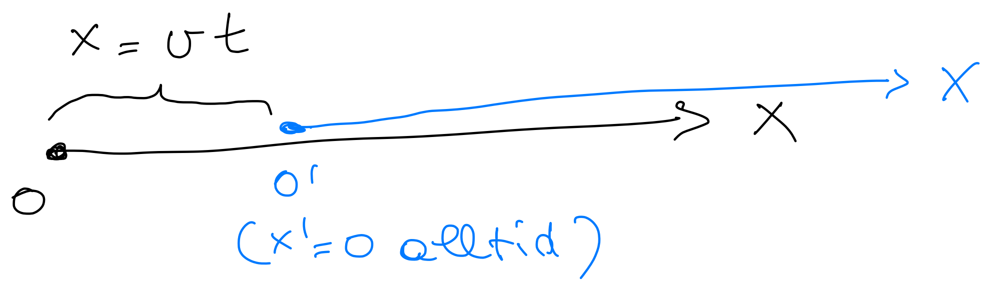
SNABB HÄRLEDNING:

Börja med $x' = \gamma x + \alpha t + \delta$ $\qquad$ α, γ, δ KONSTANTER

- δ kan bestämmas från villkoret $x = x' = 0$ vid $t = 0$ $\Rightarrow \delta = 0$

- α kan bestämmas från rörelse av O': $x' = 0$ i S' $\rangle$ $x = vt$ i S

$\Rightarrow \alpha = -v\gamma$, dvs: $x' = \gamma(x - vt)$



$x' = \gamma(x - vt)$ och p.g.a. symmetri:

$x = \gamma(x' + vt')$

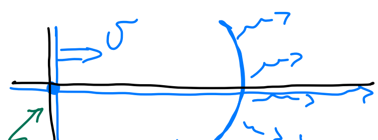
Här Newton skulle säga $t = t' \Rightarrow \gamma = 1$.

Einstein säger istället: $x = ct$ och $x' = ct'$

$$ct' = \gamma(ct - vt)$$
$$ct = \gamma(ct' + vt')$$
$$\Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}$$

Till sist kan man lösa ut

$$t' = \gamma\left(t - \frac{xv}{c^2}\right)$$



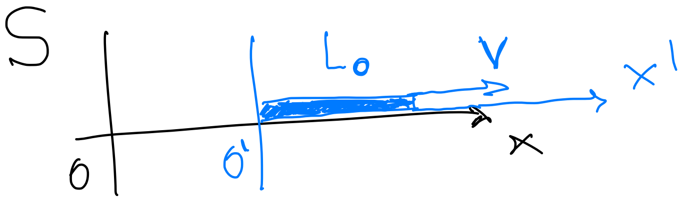
$x' = ct'$

$x = ct$

vid $O = O'$

$t = t' = 0$

LÄNGDKONTRAKTON:



STAVEN RÖR SIG MED HASTIGHET v i S.

L_0 = STAVENS VILOLÄNGD.

$= x'_{fram} - x'_{bak}$.

$$x'_{fram} = \gamma(x_{fram} - vt)$$

$$x'_{bak} = \gamma(x_{bak} - vt)$$

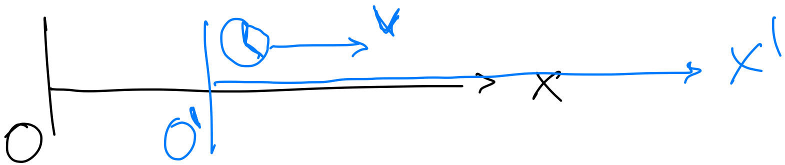
SAMMA t.

$$\Rightarrow \quad x'_{fram} - x'_{bak} = \gamma(x_{fram} - x_{bak})$$

$$L_0 = \gamma L$$

TIDSDILATATION:

EN KLOCKA SOM RÖR SIG MED HASTIGHET v i S



$$(0, T_0) = (vT, T)$$

$$t_{klocka} = \gamma\left(t'_{klocka} + v\,\overbrace{x'_{klocka}}^{=0}\right)$$

$$T = \gamma T_0$$

EGENTID

För korta intervaller: $dt = \gamma\, d\tau$

$$\Longrightarrow \quad \Delta\tau = \int \frac{dt}{\gamma}$$

HASTIGHETS ADDITION.

OBS: Definitionen av hastighet och acceleration i en inertialsystem S är DENSAMMA som i Newtons mekanik dvs:

$$u = \frac{dr}{dt}, \quad a = \frac{du}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}.$$

där man använder r och t i S.

T.ex: $u_x' = \dfrac{dx'}{dt'} = \dfrac{dx'/dt}{dt'/dt} = \dfrac{\dfrac{d(\gamma x - \gamma v t)}{dt}}{\dfrac{d\left(\gamma t - \gamma \frac{vx}{c^2}\right)}{dt}} =$

HASTIGHETS ADDITION.

OBS: Definitionen av hastighet och acceleration i en inertialsystem S är <u>DENSAMMA</u> som i Newtons mekanik dvs:

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}.$$

där man använder $\mathbf{r}$ och t i S.

T.ex:
$$u_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'/dt}{dt'/dt} = \frac{\dfrac{d(\cancel{\gamma}x - \cancel{\gamma}vt)}{dt}}{\dfrac{d\left(\cancel{\gamma}t - \cancel{\gamma}\frac{vx}{c^2}\right)}{dt}} = \frac{u_x - v}{1 - \dfrac{v u_x}{c^2}}$$

Mmm... Ekvationerna börjar se krånliga ut... Vi måste hitta en bättre notation!

T. ex:

$$a'_z = \frac{a_z}{\gamma^2\left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right)^2} + \frac{a_x u_z v / c^2}{\gamma^2\left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right)^3}$$

AUTCH!

Vi börjar med observationen att

LORENTZTRANSFORMATIONEN

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \end{cases}$$

lämnar storheten

$$\Delta s^2 := c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2$$

OFÖRÄNDRAD

KALLAS INTERVALL MELLAN TVÅ HÄNDELSER

Låt oss kolla det:

$$c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 =$$

$$c^2\left(\gamma\Delta t - \frac{\gamma v}{c^2}\Delta x\right)^2 - \left(\gamma\Delta x - \gamma v\Delta t\right)^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 =$$

$$=\left(c^2\gamma^2 - v^2\gamma^2\right)\Delta t^2 - \cancel{\gamma^2 v\Delta t\Delta x} + \cancel{\gamma^2 v\Delta x\Delta t} +$$

$$+\left(\frac{\gamma^2 v^2}{c^2} - \gamma^2\right)\Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 =$$

$$= c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 .$$

OBS: Från och med nu SÄTTER VI $c = 1$

dvs. vi mäter längden i "ljussekunder": sträckan ljuset färdas på en sekund:

$$c = 1 \; \frac{\text{ljussek}}{\text{sek}}$$

man låter bli att skriva det. Man kan alltid återinföra SI enheter med enkel dim. analys.

30 cm $\simeq$ 1 ns

En HÄNDELSE beskrivs av en punkt i RUMTID:

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \cancel{c}t & x & y & z \end{array}.$$

Den tidigare LORENTZ TRANSFORMATIONEN kan uttryckas som en MATRIS:

$$\begin{bmatrix} x^{0\prime} \\ x^{1\prime} \\ x^{2\prime} \\ x^{3\prime} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -v\gamma & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}$$

$$x^{\mu\prime} = \Lambda^\mu{}_\nu \, x^\nu \quad \longleftarrow$$

EINSTEINS KONVENTION!

EINSTEINS KONVENTION:

I en relativistisk formel, förekommer indexen som

FRIA: $A^\mu = B^\mu \longrightarrow$ Betyder:

$A^0 = B^0$, $A^1 = B^1$

$A^2 = B^2$, $A^3 = B^3$

$A_\mu = B_\mu$

SUMMERADE: $A^\mu B_\mu = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3$

$\left(\sum_\mu \text{ förstått} \right)$

INTERVALL MELLAN HÄNDELSER:

$$\Delta s^2 := (\Delta x^0)^2 - (\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2 =$$

$$= \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

ROMTIDSMETRIKEN.

UNDER LORENTZ TRANSF.:

$$\eta_{\mu\nu} \Delta x^{\mu'} \Delta x^{\nu'} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\rho} \Delta x^{\rho} \Lambda^{\nu}{}_{\sigma} \Delta x^{\sigma} =$$

$$= \underbrace{\eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\rho} \Lambda^{\nu}{}_{\sigma}}_{\eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\rho} \Lambda^{\nu}{}_{\sigma} = \eta_{\rho\sigma}} \Delta x^{\rho} \Delta x^{\sigma} = \underbrace{\eta_{\rho\sigma}}_{\text{en}} \Delta x^{\rho} \Delta x^{\sigma} \Longrightarrow$$

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\rho} \Lambda^{\nu}{}_{\sigma} = \eta_{\rho\sigma}$$

($\eta_{\mu\nu}$ är en INVARIANT TENSOR)

I matris notation:

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma} = \eta_{\rho\sigma}$$

RAD

kolumn

rad

red

kolumn

$$\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\,\eta_{\mu\nu}\,\Lambda^{\nu}{}_{\sigma} = \eta_{\rho\sigma}$$

KOLUMN

rad.

Kan skrivas som

$$\Lambda \in SO(3,1) \qquad \Lambda^{T}\eta\Lambda = \eta = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Jämför med

$$\Omega \in SO(n) \qquad \Omega^{T}\delta\Omega = \delta = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$ är också invariant:

UPPE

$$\Lambda^{\rho}{}_{\mu} \Lambda^{\sigma}{}_{\nu} \eta^{\mu\nu} = \eta^{\rho\sigma}$$

$\Rightarrow$ Vi kan använda $\eta^{\mu\nu}$, $\eta_{\mu\nu}$ för att HÖJA eller SÄNKA en index

$$A_{\mu} := \eta_{\mu\nu} A^{\nu} \quad \text{eller} \quad B^{\mu} = \eta^{\mu\nu} B_{\nu}$$

$$\Rightarrow \quad A_0 = A^0 \qquad A_{1,2,3} = -A^{1,2,3}$$

LORENTZ PRODUKT

$$A_\mu B^\mu = A^\mu B_\mu = \eta^{\mu\nu} A_\mu B_\nu = \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu =$$

$$= A_0 B^0 + A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3$$

$$= A_0 B_0 - A_1 B_1 - A_2 B_2 - A_3 B_3$$

$$= A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3$$

LORENTZ KVADRAT

$$A^2 = A_\mu A^\mu = \ldots$$

KONTRAVARIANT INDEX $\quad V^\mu \longrightarrow V^{\mu'} = \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu$

KOVARIANT INDEX $\quad W_\mu \longrightarrow W'_\mu = \Lambda^{-1\,\nu}{}_\mu W_\nu$

$$\Rightarrow \quad V^\mu W_\mu \to V^{\mu'} W'_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu \Lambda^{-1\,\rho}{}_\mu W_\rho$$

$$= V^\nu \Lambda^\mu{}_\nu \Lambda^{-1\,\rho}{}_\mu W_\rho = V^\nu \delta^\rho_\nu W_\rho = V^\nu W_\nu$$

KOMPATIBEL med den tidigare konvention för att $\Lambda^{-1\,\rho}{}_\nu = \eta^{\rho\mu} \Lambda^\sigma{}_\mu \eta_{\sigma\nu}$ VISA DEN!

LORENTZ GRUPPEN $SO(3,1)$ är då (Lie)-gruppen av REELLA 4×4 matriser som lämnar

$$\begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

oförändrat.

Q: $\dim(SO(3,1)) = ?$

LORENTZ GRUPPEN $SO(3,1)$ är då (Lie)-gruppen av REELLA 4×4 matriser som lämnar

$$\begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

oförändrat.

Q: $\dim(SO(3,1)) = 6$

3 "BOOSTS" längs x, y, z:

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v_x & 0 & 0 \\ -\gamma v_x & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\gamma v_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma v_y & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma v_z \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma v_z & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

och

LORENTZ GRUPPEN $SO(3,1)$ är då (Lie)-gruppen av REELLA 4×4 matriser som lämnar $\begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ oförändrat.

Q: $\dim(SO(3,1)) = 6$

3 ROTATIONER kring x, y, z.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi_x & -\sin\varphi_x \\ 0 & 0 & \sin\varphi_x & \cos\varphi_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_y & 0 & \sin\varphi_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\varphi_y & 0 & \cos\varphi_y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_z & -\sin\varphi_z & 0 \\ 0 & \sin\varphi_z & \cos\varphi_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$X^\mu \longrightarrow \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu$ är ett exempel av 4-VEKTOR

(jämför med $x^i \to R^i{}_j x^j$ i 3-D)

4-HASTIGHET: $U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\left(\frac{dx^0}{dt}, \frac{d\vec{x}}{dt}\right)$

$= \gamma\,(1, \vec{u})$

EGENTID

(LORENTZ INVARIANT)

OBS: $d\tau^2 = dt^2 - d\vec{r}^{\,2} = dt^2(1 - \vec{u}^2) \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \gamma.$

4-ACCELERATION: $A^\mu = \frac{dU^\mu}{d\tau} = \ldots$

Q: $U^2 = ?$ $A \cdot U = ?$

$A \quad U^2 = ? \qquad A \cdot U = ?$

Fätte viktigt knep: U^2 och $A \cdot U$ är Lorentz invarianta (SKALÄRA) dvs de har samma värde i alla inertiala system. Låt oss beräkna dem i det enklaste! I detta fall är det det MOMENTANA VILOSYSTEM:

$$U^\mu = (\gamma, \gamma v) \xrightarrow{v \to 0} (1, 0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow U^2 = 1$$

Om ni inte köper det, kan vi göra det den svåra vägen:

$$U^\mu = (\gamma, \gamma v_{/\!/})$$

$$U^2 = (U^0)^2 - (U^1)^2 - (U^2)^2 - (U^3)^2$$

$$= \gamma^2 - \gamma^2 v_x^2 - \gamma^2 v_y^2 - \gamma^2 v_z^2$$

$$= \gamma^2 - \gamma^2 v^2 = \gamma^2(1 - v^2) = 1$$

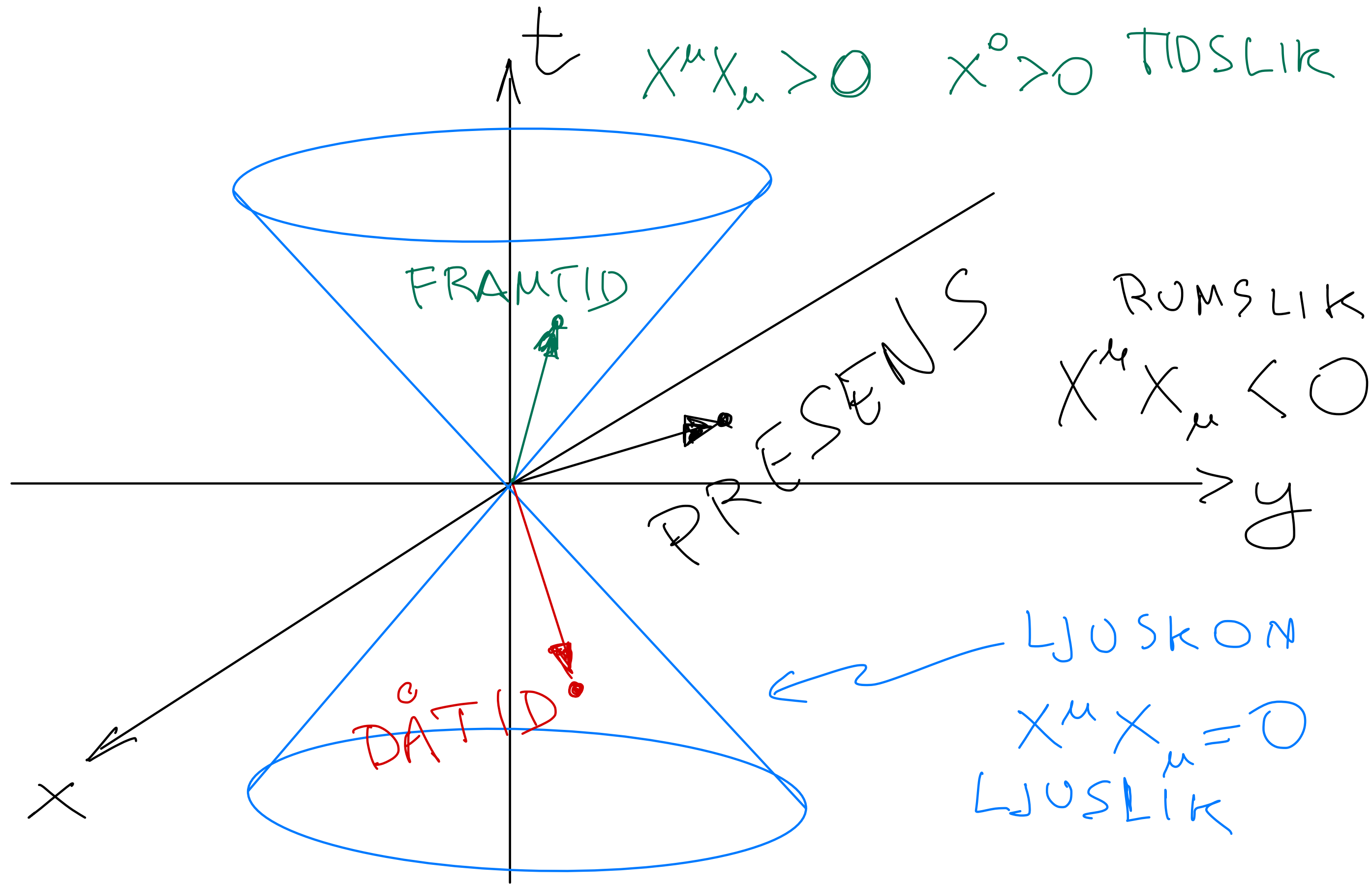
$$\frac{dU^2}{d\tau} = 2U^\mu A_\mu = 0 \Rightarrow U \cdot A = 0$$

MOMENTAN ACCELERATION

men också: $A^\mu \xrightarrow{v_{/\!/} \to 0} (0, a)$

$$U \cdot A = 1 \cdot 0 - 0 \cdot a = 0$$

MINKOWSKI RUM.



$X^\mu X_\mu > 0, \; X^0 < 0$ TIDSLIK