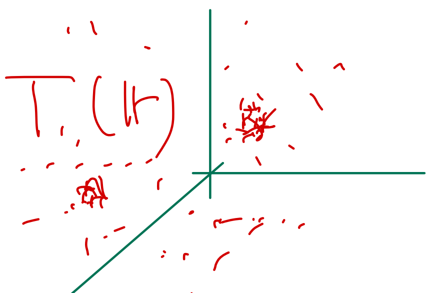
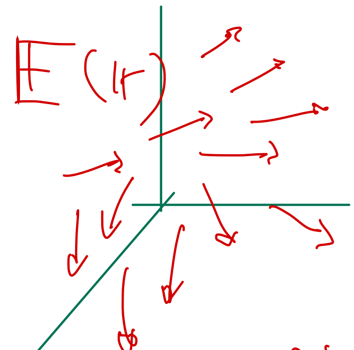
SPECIELL RELATIVITETSTEORI 3

Ett skalär/vektor/tensor FÄLT är en funktion som ger en skalär/vektor/tensor för varje punkt i MINKOWSKY RUM:

3D exampel

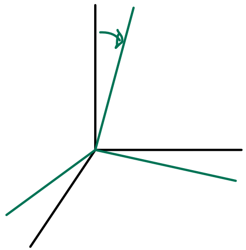


temperatur:
skalär fält.



den elektriska fältet
vektor fält.

Om jag roterar mitt koordinatsystem



$$x'^i = R^i{}_j \, x^j$$

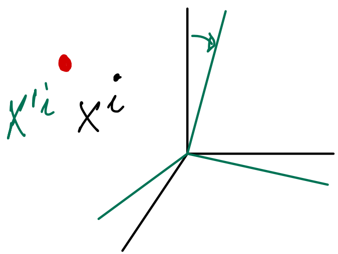
Rotations matris

$$T'(x'^1, x'^2, x'^3) = T(x^1, x^2, x^3)$$

$$E'^i(x'^1, x'^2, x'^3) = R^i{}_j \, E^j(x^1, x^2, x^3)$$

här måste jag rotera både argumenten och vektor funktionen.

Om jag roterar mitt koordinatsystem



$$x'^i = R^i_j \, x^j$$

Rotations matris

$$T'(x'^1, x'^2, x'^3) = T(x^1, x^2, x^3)$$

$$E'^i(x'^1, x'^2, x'^3) = R^i_j \, E^j(x^1, x^2, x^3)$$

här måste jag rotera både argumenten och vektor funktionen.

OBS även för en skalär

$T' \neq T$ som funktion

dvs $T'(a,b,c) \neq T(a,b,c)$

Det är samma sak i 4D Minkowski rum.

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$$

SKALÄR FÄLT: $\phi'(x') = \phi(x)$

VEKTOR FÄLT: $F'^{\mu}(x') = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} F^{\nu}(x)$

⋮

TENSORFÄLT: $T'^{\mu\nu}{}_{\rho}(x') = \Lambda^{\mu}{}_{\sigma} \Lambda^{\nu}{}_{\tau} \Lambda^{-1\lambda}{}_{\rho} T^{\sigma\tau}{}_{\lambda}(x)$

ofta försummat att skriva.

⋮

Syftet med utvecklingen av 4D notationen är att slippa behöva kolla om en viss formel är relativistisk invariant.

Det är samma anledning till att vi utvecklade vektor notation i 3D för att göra rotationsinvarians manifest

3D exempel. B_x, B_y, B_z = Magnetiskt fält.

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y} = \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x} = 0$$

3D exempel. B_x, B_y, B_z = Magnetiskt fält.

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y} = \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x} = 0$$

Q: Är ekvationerna rotationsivarianta!

3D exempel. B_x, B_y, B_z = Magnetiskt fält.

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y} = \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x} = 0$$

Q: Är ekvationerna rotationsinvarianta?

A: Mmmm.. testa först: $x' = \cos\varphi\, x + \sin\varphi\, y$
$y' = -\sin\varphi\, x + \cos\varphi\, y$

... räckna.. räckna .. räkna ..

... Ja!

3D exempel. B_x, B_y, B_z = Magnetiskt fält.

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y} = \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x} = 0$$

Q: Är ekvationerna rotationsivarianta!

eller

3D exempel. B_x, B_y, B_z = Magnetiskt fält.

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y} = \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0$$

Q: Är ekvationerna rotationsivariante!

eller

A: $\nabla \times \mathbb{B} = 0$.

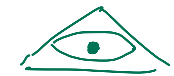
Om en vektor $(\nabla \times B)$ är NOLL I EN KOORDINATSYST. så är det noll i ALLA

MAXWELLS EKVATIONER

i vakuum, Lorentz-Heaviside + NATURLIGA enheter:

$$\epsilon_0 = \mu_0 = c\,(= \hbar = k_B) = 1$$

SOM GUD SJÄLV AVSÅG DET!



$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

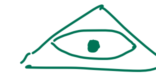
$$\nabla \times \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{B} - \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{J}$$

MAXWELLS EKVATIONER

i vakuum, Lorentz-Heaviside + NATURLIGA enheter:

$$\epsilon_0 = \mu_0 = c \, (= \hbar = k_B) = 1$$

SOM GUD SJÄLV AVSÅG DET!



$$\nabla \cdot \mathbb{E} = \rho$$ Gauss

$$\nabla \cdot \mathbb{B} = 0$$?

$$\nabla \times \mathbb{E} + \dot{\mathbb{B}} = 0$$

Faraday

$$\nabla \times \mathbb{B} - \dot{\mathbb{E}} = \mathbb{J}$$

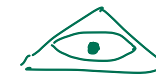
Ampere + Maxwell

MAXWELLS EKVATIONER

i vakuum, Lorentz-Heaviside + NATURLIGA enheter:

$$\epsilon_0 = \mu_0 = c \; (= \hbar = k_B) = 1$$

SOM GUD SJÄLV AVSÅG DET!



$$\nabla \cdot \mathbb{E} = \rho \qquad \nabla \cdot \mathbb{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbb{E} + \dot{\mathbb{B}} = 0 \qquad \nabla \times \mathbb{B} - \dot{\mathbb{E}} = \mathbb{J}$$

De är uppenbart ROTATIONSINVARIANTA

men ÄR DE LORENTZINVARIANTA?

Vi måste skriva dem i en 4D notation

Vi säg att:

3D		4D
$\mathbb{r}$	$\longrightarrow$	$x^\mu = (t, \mathbb{r})$
$\mathbb{u}$	$\longrightarrow$	$U^\mu = (\gamma, \gamma \mathbb{u})$
$\mathbb{P}_{Newton}$	$\longrightarrow$	$P^\mu = (E, \mathbb{P})$
$\mathbb{F}_{Newton}$	$\longrightarrow$	$F^\mu = (\gamma \mathbb{F} \cdot \mathbb{u}, \gamma \mathbb{F})$

Vi måste skriva dem i en 4D notation

Vi såg att:

3D		4D
$\mathbb{r}$	$\longrightarrow$	$x^\mu = (t, \mathbb{r})$
$\mathbb{u}$	$\longrightarrow$	$U^\mu = (\gamma, \gamma \mathbb{u})$
$\mathbb{P}_{Newton}$	$\longrightarrow$	$P^\mu = (E, \mathbb{P})$
$\mathbb{F}_{Newton}$	$\longrightarrow$	$F^\mu = (\gamma \mathbb{F} \cdot \mathbb{u}, \gamma \mathbb{F})$

kanske

$\mathbb{E}$	$\longrightarrow$	$E^\mu = \ldots$	???
$\mathbb{B}$	$\longrightarrow$	$B^\mu = \ldots$	

Vi måste skriva dem i en 4D notation

Vi såg att:

3D		4D
$\mathbb{r}$	$\longrightarrow$	$x^\mu = (t, \mathbb{r})$
$\mathbb{u}$	$\longrightarrow$	$U^\mu = (\gamma, \gamma \mathbb{u})$
$\mathbb{P}_{Newton}$	$\longrightarrow$	$P^\mu = (E, \mathbb{P})$
$\mathbb{F}_{Newton}$	$\longrightarrow$	$F^\mu = (\gamma \mathbb{F}\cdot\mathbb{u}, \gamma\mathbb{F})$
~~$\mathbb{E}$~~	~~$\longrightarrow$~~	~~$E^\mu = \ldots$~~
~~$\mathbb{B}$~~	~~$\longrightarrow$~~	~~$B^\mu = \ldots$~~

FEL!

Svaret:

$$F_{\mu\nu} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \mu = 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \nu = 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} & \end{array} = -F_{\nu\mu}$$

Den ELEKTROMAGNETISKA FÄLTTENSORN

$$F'_{\mu\nu} = \Lambda^{-1\,\rho}{}_{\mu} \Lambda^{-1\,\sigma}{}_{\nu} F_{\rho\sigma}, \qquad F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}F_{\rho\sigma}$$

Kanske det enklaste sättet att förstår varför är att börja med generalisering av

LORENTZKRAFTEN

$$\mathbb{F}_{Lor} = q\,(\mathbb{E} + \mathbb{u} \times \mathbb{B})$$

Lorentz invariant LADDNING.

- Vi vet hur $\mathbb{F}_{Lor}$ och $\mathbb{u}$ generaliseras och
- Vi vet att $F^\mu \cancel{\propto} U^\mu$ (annars $\mathbb{F} \parallel \mathbb{u}$ som är fel)

$\Longrightarrow$ Testa. $F_\mu = q\, F_{\mu\nu} U^\nu$

$$F_\mu = q F_{\mu\nu} U^\nu \qquad F_\mu = \gamma(\mathbb{F}\cdot u, -\mathbb{F})$$

$$U^\nu = \gamma(1, u)$$

ATT VARA BESTÄMD

OBS F_μ och $F_{\mu\nu}$ är två helt olika objekt! Tyvärr används bokstaven F för båda.

Vi testar $\mu = 1$:

$$F_1 = q\left(F_{10} U^0 + F_{11} U^1 + F_{12} U^2 + F_{13} U^3\right)$$

$$F_\mu = q\, \underset{\uparrow}{F_{\mu\nu}}\, U^\nu \qquad F_\mu = \gamma(\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}, -\mathbf{F}) \qquad U^\nu = \gamma(1, \mathbf{u})$$

ATT VARA BESTÄMD

OBS F_μ och $F_{\mu\nu}$ är två helt olika objekt! Tyvärr används bokstaven F för båda.

Vi testar $\mu = 1$:

$$\underset{\substack{\| \\ -\gamma F_{Lor,x}}}{F_1} = q\Big(F_{10}\underset{\substack{\| \\ \gamma}}{U^0} + \underbrace{\cancel{F_{11}}}_{0} U^1 + F_{12}\underset{\substack{\| \\ \gamma u_y}}{U^2} + F_{13}\underset{\substack{\| \\ \gamma u_z}}{U^3}\Big)$$

$$\underbrace{F_1}_{=-\gamma F_{Lor,x}} = q\Big(\underbrace{F_{10}}_{=-E_x}\underbrace{U^0}_{=\gamma} + \overbrace{\cancel{F_{11}}}^{0}U^1 + \underbrace{F_{12}}_{=-B_z}\underbrace{U^2}_{=\gamma u_y} + \underbrace{F_{13}}_{=+B_y}\underbrace{U^3}_{=\gamma u_z}\Big)$$

$$\Rightarrow \quad F_{Lor,x} = q\left(E_x + u_y B_z - u_z B_y\right)$$

x-komp av $\quad \mathbf{F}_{Lor} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}\right)$

Liknande för de andra (testa också $\mu = 0$)

För att $F_\mu = q F_{\mu\nu} U^\nu$ ska vara lorentz inv. kräus då att $F_{\mu\nu}$ transformeras som en tensor.

MAXWELL: $\left(\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \quad , \quad \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0$$

Där $J^\nu = (\rho, \mathbf{J})$ en 4-VEKTOR.

Kolla t.ex. $\nu = 0$ i $\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$:

$$\underbrace{\partial_0 F^{00}}_{0} + \underbrace{\partial_1}_{\partial_x} \underbrace{F^{10}}_{E_x} + \underbrace{\partial_2}_{\partial_y} \underbrace{F^{20}}_{E_y} + \underbrace{\partial_3}_{\partial_z} \underbrace{F^{30}}_{E_z} = \underbrace{J^0}_{\rho}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbb{E} = \rho$$

ok!

$\nu = 1, 2, 3$ leder till.

$$\nabla \times \mathbb{B} - \dot{\mathbb{E}} = \mathbb{J}.$$

Visa kontinuitetsekvationen

$$\left(\partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \longrightarrow \partial_\nu J^\nu = 0 \right)$$

Börja med $\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$.

Derivera båda med ∂_ν: $\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\nu J^\nu$

Obs att: $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} \Longrightarrow \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$

Bevis: $\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu F^{\nu\mu} \right) =$

$$= \frac{1}{2}\left(\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} + \partial_\nu \partial_\mu \left(-F^{\mu\nu}\right) \right) = 0$$

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} = 0$$

Innehåller ingen källa och kan "lösas" en gång för alla med hjälp av

GAUGE POTENTIALEN: $A^\mu = (V, \mathbf{A})$:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (= -F_{\nu\mu}) \text{ ok.}$$

(*) $\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} = 0$

Innehåller ingen källa och kan "lösas" en gång för alla med hjälp av

GAUGE POTENTIALEN: $A^\mu = (V, \mathbf{A})$:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (= -F_{\nu\mu}) \text{ ok.}$$

Q: Visa att uppfyller (*)

Vi kan uttrycka Maxwell ekv med hjälp av gauge potentialen

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu \left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \right) = J^\nu$$

$$\Rightarrow \underbrace{\partial_\mu \partial^\mu}_{= \partial_t^2 - \nabla^2 = \Box} A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = J^\nu$$

D'Alambert operator. $(c=1)$

Vi kan förenkla ekvationen genom att observera att

$$A^{\mu\prime} = A^\mu \underbrace{+ \partial^\mu \varphi}_{\text{gauge transformation}}$$

leder till samma $F^{\mu\nu\prime} = F^{\mu\nu}$

$$A'^{\mu} = A^{\mu} + \partial^{\mu}\psi$$ VÄLJ ψ så att:

$$\partial_{\mu}A'^{\mu} = \partial_{\mu}A^{\mu} + \partial_{\mu}\partial^{\mu}\psi = 0$$ ($\exists\, \psi$ lösning)

Så istället för

$$\partial_{\mu}\partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}\partial_{\mu}A^{\mu} = J^{\nu}$$

kan vi använda:

$$\begin{cases} \partial_{\mu}\partial^{\mu}A'^{\nu} = J^{\nu} \\ \partial_{\mu}A'^{\mu} = 0 \end{cases}$$

enklare!

$$\Box A'^{\mu} = J^{\mu}$$