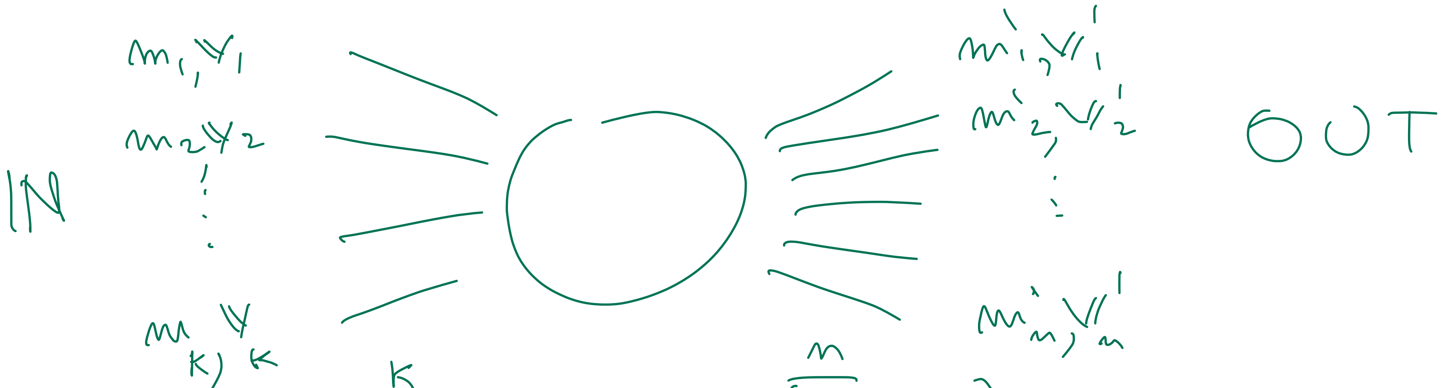
SPECIELL RELATIVITETSTEORI 2

Den viktigaste resultaten i NEWTONS MEKANIK är att i ett ISOLERAT SYSTEM



$$\sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{j=1}^{n} m'_j$$

MASSAN bevaras

$$\sum_{i=1}^{k} m_i v_i = \sum_{j=1}^{n} m'_j v'_j$$

RÖRELSEMÄNGDEN bevaras

Vi letar efter en RELATIVISTISK motsvarande som uppfyller kraven:

1) GÄLLER OFÖRÄNDRAD I ALLA INERTIALSYSTEM.

2) REDUCERAS TILL NEWTONS DÅ ALLA $|v| \ll c$
(ibland säger man när $c \to \infty$)

DEF: Den RELATIVISTISKA 4-RÖRELSEMÄNGDEN:
(för en partikel med massa m):

$$P^\mu = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(INVARIANT MASSA)}}}{m} U^\mu = (\underbrace{m\gamma}_{\mu=0}, \underbrace{m\gamma \vec{v}}_{\mu=1,2,3.})$$

Vi kallar $\mathbb{P} = m\gamma \mathbb{V}$ RELATIVISTISK 3-RÖRELSEMÄNGD.

$$\frac{|\mathbb{V}|}{c} \to 0 \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \to 1$$

$$\Rightarrow P^\mu \to (m, m\mathbb{V})$$ (Newtons uttryck för massa & rörelsemängd)

$\Rightarrow$ KONSERVERING AV 4-RÖRELSEMÄNGD:

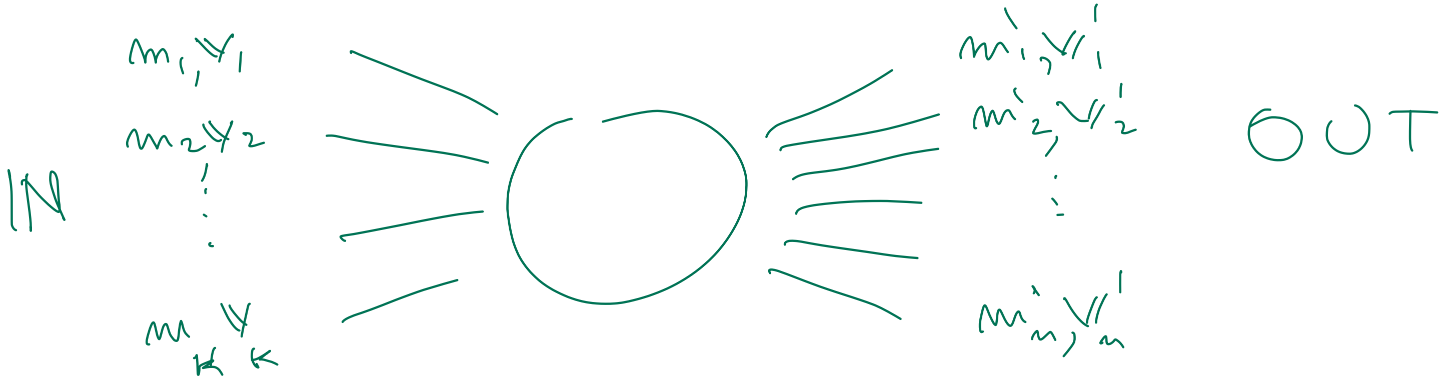
$$\boxed{\sum_{i=1}^{k} P_i^\mu = \sum_{j=1}^{n} q_j^\mu}$$

Anta att $\sum_{i=1}^{k} p_i^\mu = \sum_{j=1}^{n} q_j^\mu$ i ett inertialsyst.

i ett annat

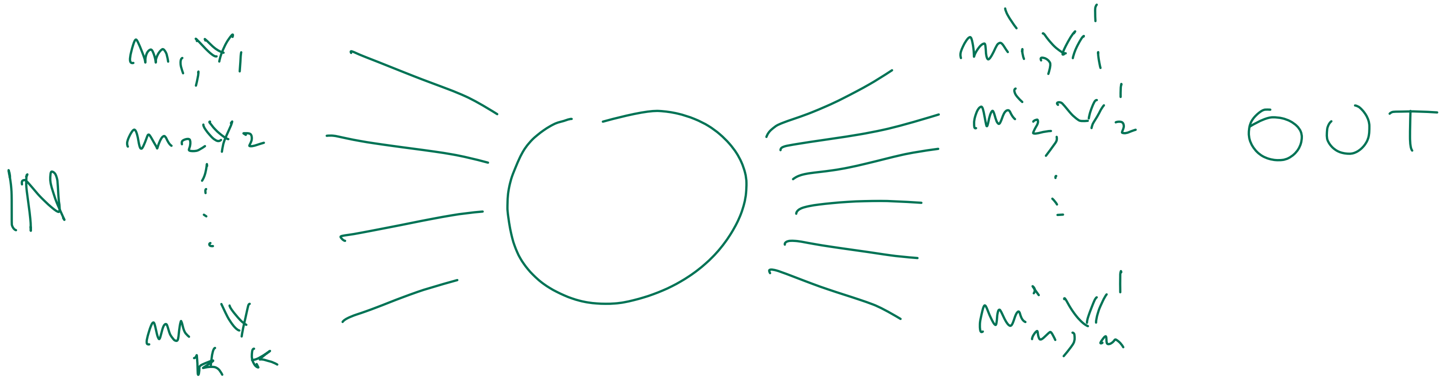
$$\sum p_i'^\mu \overset{?}{=} \sum q_j'^\mu$$

JA! $\sum p_i'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \sum p_i^\nu = \Lambda^\mu{}_\nu \sum q_j^\nu = \sum q_j'^\nu$



$$\sum_{i=1}^{k} m_i \gamma(v_i) = \sum_{j=1}^{n} m'_j \gamma(v'_j)$$

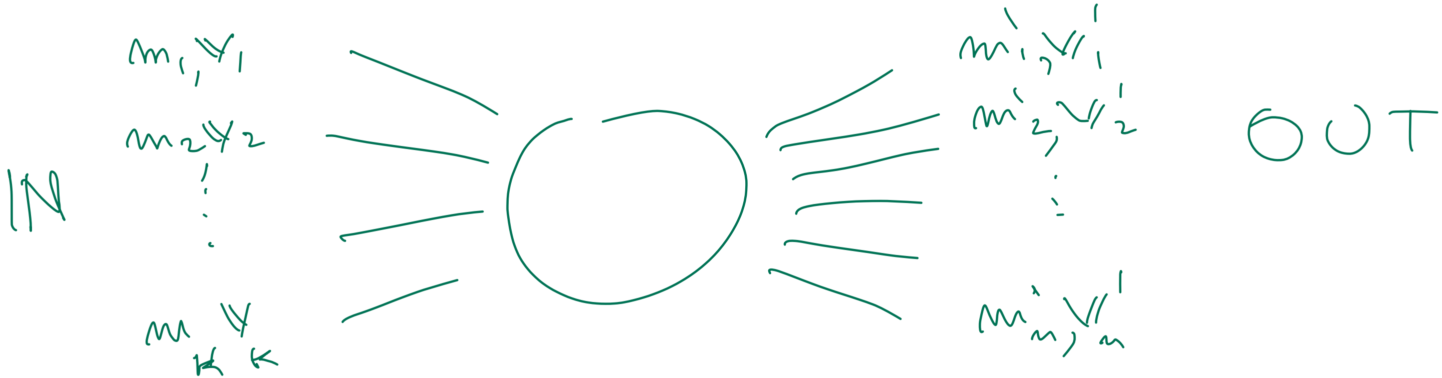
$$\sum_{i=1}^{k} m_i \gamma(v_i) v_i = \sum_{j=1}^{n} m'_j \gamma(v'_j) v'_j$$



$$\sum_{i=1}^{k} m_i \gamma(v_i) = \sum_{j=1}^{n} m'_j \gamma(v'_j)$$

$$\sum_{i=1}^{k} \underbrace{m_i \gamma(v_i) \mathbf{v}_i}_{\mathbf{P}_i} = \sum_{j=1}^{n} m'_j \gamma(v'_j) \mathbf{v}'_j$$

REL 3-RÖRELSEMÄNGD BEVARAS



$$\sum_{i=1}^{k} \underbrace{m_i\,\gamma(v_i)}_{\text{VAD ÄR DET HÄR?}} = \sum_{j=1}^{n} m_j'\,\gamma(v_j')$$

$$\sum_{i=1}^{k} \underbrace{m_i\,\gamma(v_i)\,v_i}_{\mathbf{p}_i\ \text{REL 3-RÖRELSEMÄNGD}} = \sum_{j=1}^{n} m_j'\,\gamma(v_j')\,v_j'$$

$$\sum_{i=1}^{k} m_i \gamma(v_i) = \sum_{j=1}^{n} m_j' \gamma(v_j')$$

OBS: om detta stämmer, kan INTE massan vara beroende om hastigheterna är $\neq 0$.

För en partikel: $(c=1)$ $\quad v \ll 1$

$$m\gamma(v) = m\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \simeq m\left(1 + \frac{1}{2}v^2 + \dots\right)$$

$$= m + \frac{1}{2}mv^2 + \dots$$

EINSTEIN: $m\gamma$ = TOTALA ENERGI FÖR EN PARTIKEL MED MASSA $m \neq 0$ ← OBS.

Här är det värt att sätta tillbaka c för att ekv. är ganska berömd...

$$E = mc^2\gamma = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \simeq \underbrace{mc^2}_{\text{VILOENERGI}} + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2 + \dots}_{\text{RELATIVISTISK RÖRELSE ENERGI}}$$

TOT. RELATIVISTISK ENERGI.

ej bevarad separat

Bara summan.

BEVARAD: $\sum_{i=1}^{k} E_i = \sum_{j=1}^{n} E_j'$

VANLIGT MISTAG: "En foton är masslös (SANT!)

$$E = mc^2\gamma$$

då måste energi vara noll (FEL!)

VANLIGT MISTAG: "En foton är masslös (SANT!)

då måste energi vara noll (FEL!)

$$E = mc^2\gamma$$

Q: VARFÖR är FEL?

VANLIGT MISTAG: "En foton är masslös (SANT!)
då måste energi vara noll (FEL!)

$$E = mc^2\gamma$$

A: när $m \to 0$ måste vi låta
$\gamma \to \infty$ $(v \to c)$ så att E är ändlig.

$$\underbrace{P^\mu = (E, \mathbb{P})}_{\text{ALLTID SANT}} \underbrace{= (m\gamma, m\gamma v)}_{\text{FÖR PARTIKLAR med } m \neq 0}.$$

$P^\mu = (E, \mathbb{P})$ är den allmänna definitionen.

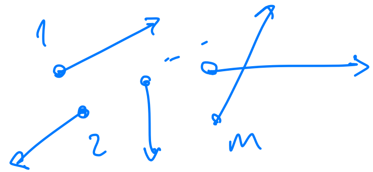
(Om vi verkligen vill veta v och γ för $m \neq 0$: $v = \frac{\mathbb{P}}{E}$, $\gamma = \frac{E}{m}$)

"MASS-SKAL" RELATION:

$$P^\mu P_\mu = E^2 - |\mathbb{P}|^2 \underset{\text{för } m \neq 0}{=} m^2 \underbrace{(\gamma^2 - \gamma^2 v^2)}_{1} = m^2$$

GÄLLER OCKSÅ I GRÄNSEN $m \to 0$.

RELATIVISTISK "MASSCENTRUM"



$$\sum P_i^\mu = P^\mu_{TOT} = (E_{TOT}, \mathbf{P}_{TOT})$$

IBLAND SÄGER MAN "LAB"

Det är svårt och onödigt att hitta VAR masscentrum ligger. Vi är mer intresserade i REFERENSSYSTEMET där MASSCENTRUM är i VILA (dvs $\mathbf{P}'_{TOT} = 0$)

Ta $P_{TOT} = (P_{TOT}, 0, 0)$ för enkelhetens skull:

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma u \\ -\gamma u & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{TOT} \\ P_{TOT} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{CM} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u = \frac{P_{TOT}}{E_{TOT}}$$

DEF.

$$\left(\mathbf{u} = \mathbf{P}_{TOT} / E_{TOT} \right)$$

PARTIKEL SÖNDERFALL.

$(E_2, -P, 0, 0) = q_2^\mu$

$q_1^\mu = (E_1, \underbrace{P, 0, 0}_{\text{kan alltid väljas}})$

m_2 $\qquad$ m_1

M i vila

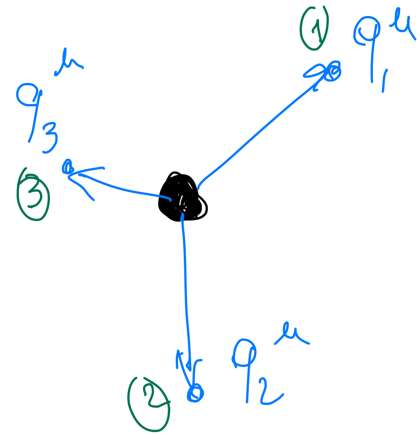
$P^\mu = (M, 0, 0, 0)$

$$P^\mu = q_1^\mu + q_2^\mu$$

$\mu = 1, 2, 3: \quad 0 = 0$ ok

$\mu = 0: \quad M = E_1 + E_2 = \sqrt{p^2 + m_1^2} + \sqrt{p^2 + m_2^2}$

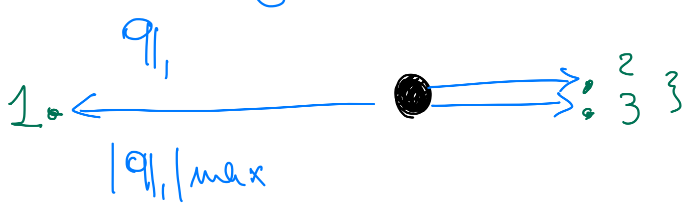
$$\Longrightarrow p = \frac{\sqrt{M^4 + m_1^4 + m_2^4 - 2M^2 m_1^2 - 2M^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_2^2}}{2M}$$



Kan inte helt fastställas, men vi vet att q_1, q_2, q_3 ligger på ett plan därför

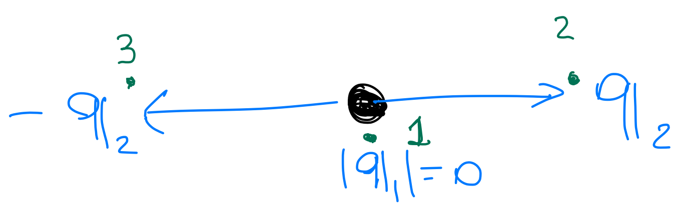
$$q_1 + q_2 + q_3 = 0$$

Extrema fall: (för part. # 1)



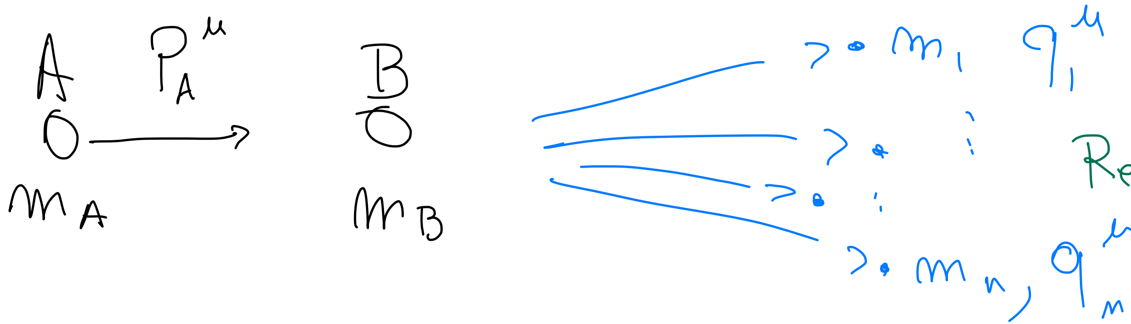
relativ hastigh. = 0

$m_{TOT} = m_2 + m_3$.



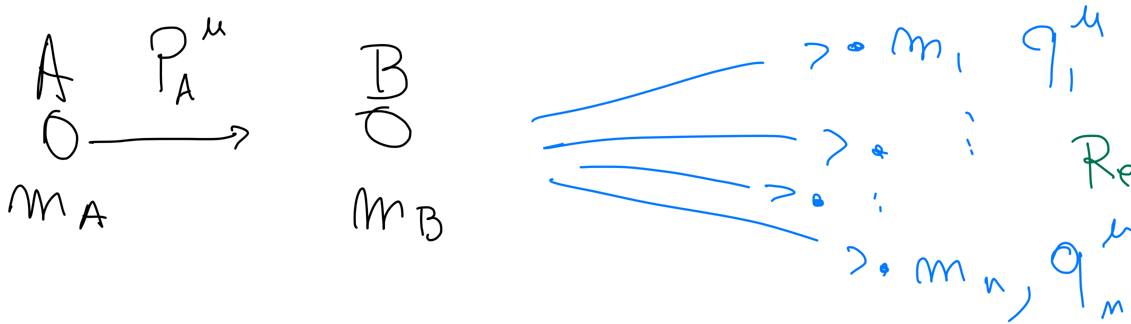
TRÖSKELENERGI

Partikel A kolliderar med part. B i vila och skapar n partikler med masse $m_1, \ldots m_n$ (OBS: A och B kan vare blend dem om de inte förstörs).



"LABBETS" Referenssystem.

$$P_A^\mu + P_B^\mu = q_1^\mu + \cdots q_n^\mu$$



"LABBETS" Referenssystem,

$$p_A^\mu + p_B^\mu = q_1^\mu + \dots q_n^\mu$$

$$p_A^\mu = (E_{lab}, p_{lab}, 0, 0) \quad \text{där} \quad E_{lab} = \sqrt{m_A^2 + p_{lab}^2}$$

$$p_B^\mu = (m_B, 0, 0, 0)$$

Beräkna $(p_A + p_B)^2 = (q_1 + \dots q_n)^2 \equiv s$

$$(P_A+P_B)^2 = (P_A^\mu + P_B^\mu)(P_{A\mu}+P_{B\mu}) = (E_{lab}+m_B)^2 - P_{lab}^2 =$$

$$= E_{lab}^2 + 2m_B E_{lab} + m_B^2 - P_{lab}^2 = m_A^2 + 2m_B E_{lab} + m_B^2$$

$$\| \quad S \quad \|$$

$$(q_1 + \cdots q_n)^2 = q_1^2 + \cdots q_n^2 + 2q_1 \cdot q_2 + 2q_1 \cdot q_3 + \cdots \; 2q_{n-1} \cdot q_n$$

OBS: $i \neq j$ $\quad q_i \cdot q_j$ är en skalär. Låt oss beräkna den med i I VILA:

$$q_i^\mu = (m_i, 0\,0\,0), \quad q_j^\mu = (m_j \gamma(v_{ij}), \ldots)$$

DEN RELATIVA hastigheten.

$$\Rightarrow q_i \cdot q_j = m_i m_j \gamma(v_{ij}) \geq m_i m_j$$

$$(P_A+P_B)^2 = (P_A^\mu+P_B^\mu)(P_{A\mu}+P_{B\mu}) = (E_{lab}+m_B)^2 - P_{lab}^2 =$$

$$= E_{lab}^2 + 2m_B E_{lab} + m_B^2 - P_{lab}^2 = m_A^2 + 2m_B E_{lab} + m_B^2$$

$$\| \quad s \quad \|$$

$$(q_1+\dots q_n)^2 = q_1^2 + \dots q_n^2 + 2q_1\cdot q_2 + 2q_1\cdot q_3 + \dots 2q_{n-1}\cdot q_n$$

$$= m_1^2 + \dots m_n^2 + 2m_1m_2\gamma(v_{12}) + \dots 2m_{n-1}m_n\gamma(v_{n-1,n}) \geq$$

$$m_1^2 + m_n^2 + 2m_1m_2 + \dots 2m_{n-1}m_n =$$

$$(m_1+\dots m_n)^2$$

$$\Rightarrow \quad m_A^2 + 2m_B E_{lab} + m_B^2 \geq (m_1+\dots m_n)^2$$

$$m_A^2 + 2m_B E_{lab} + m_B^2 \geq (m_1 + \dots m_n)^2$$

$$\Rightarrow E_{lab} \geq \underbrace{\frac{(m_1 + \dots m_n)^2 - m_A^2 - m_B^2}{2m_B}}_{\text{TRÖSKELENERGI}}$$

(Ofta i kärnfysik används
$T_{lab} = E_{lab} - m_A$)

4 - KRAFTEN:

$$F^\mu \underset{=}{\text{def}} \frac{dP^\mu}{d\tau} = \underbrace{\frac{dt}{d\tau}}_{=\gamma} \cdot \left(\frac{dE}{dt}, \underbrace{\frac{d\mathbb{P}}{dt}} \right)$$

RELATIVISTISKA 3- KRAFTEN:

$$\mathbb{F} \underset{=}{\text{def}} \frac{d\mathbb{P}}{dt}$$

OBSERVERA att definitionerna är lite annorlunda:

$$P^\mu = m\frac{dx^\mu}{d\tau} = m\underbrace{\frac{dt}{d\tau}}_{\gamma}(1, \mathbf{u}) = (m\gamma, m\gamma\mathbf{u}) = (E, \mathbb{P})$$

INGÅR I DEFINITIONEN AV $\mathbb{P}$

$$F^\mu = \frac{dP^\mu}{d\tau} = \underbrace{\frac{dt}{d\tau}}_{\gamma}\left(\frac{dE}{dt}, \frac{d\mathbb{P}}{dt}\right) = \gamma(E, \mathbb{F})$$

INGÅR INTE I DEF. AV $\mathbb{F}$

Det är faktiskt en bra def. som vi kommer att se när vi kolla på Lorentz kraften.

Om partikel har en massa $m \neq 0$

$p^\mu = m U^\mu$. Då uppstår frågan:

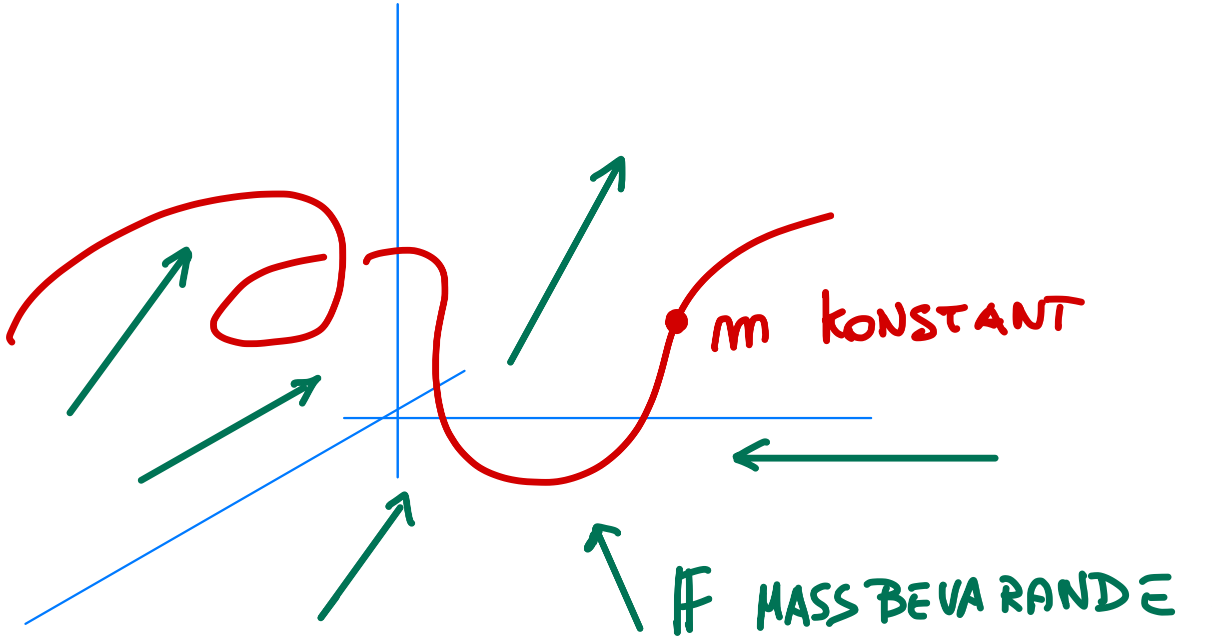
Ska det vara

$$F^\mu = \frac{dP^\mu}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(m U^\mu)$$ eller

$$F^\mu = m \frac{dU^\mu}{d\tau} = m A^\mu$$

dvs m in/ute ?

Vi är bara intresserade i MASSBEVARANDE krafter: $\frac{dm}{d\tau} = 0$ där de två definitionerna är SAMMA.



m KONSTANT
F MASSBEVARANDE.

Villkor för en massbevarande kraft:

$$F^\mu = \frac{dP^\mu}{d\tau} = m A^\mu$$

$$m \neq 0, \quad A^\mu U_\mu = 0 \Rightarrow F^\mu U_\mu = 0.$$

$$U^\mu = (\gamma, \gamma \mathbf{u}), \quad F^\mu = \left(\gamma \frac{dE}{dt}, \gamma \mathbf{F}\right)$$

$$F^\mu U_\mu = \gamma^2 \frac{dE}{dt} - \gamma^2 \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} = 0 \Rightarrow \frac{dE}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}.$$

$$\Rightarrow F^\mu = \gamma(\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}, \mathbf{F})$$

OBS: LORENTZ KRAFTEN ÄR MASSBEVARANDE.