

Föreläsningar

tis, tor och fre, 8:15-10:00

(lv 3 och 4 ons isf tor, lv 5 mån 15:15-17 isf lv 6 fre)

Program

Hemsida: Canvas

Föreläsningsprogram & föreläsningsanteckningar,
rekommenderade övningar, kurskrav för tentan

Övningar

tis 10:15-12:00 och tor 10:15-12:00

2 Grupper, idag: Efternamn A-L: Svea 226, M-Ö: Svea 241,
se hemsida

ons 10:15-12:00 och tor 15:15-17:00

1 Grupp

Kan välja när som passar med schema.

Kurslitteratur

Stewart, Calculus, **8th** ed

*(som i tidigare matematikkurser,
7:e ok, följ program från 2017/18)*

kap 13-16

*(om inte har boken sedan tidigare, finns upplaga
Multivariable Calculus som har kapitlen vi går igenom)*

Examination

Tenta em 29/10,

50p, 20 p - 3:a, 30p - 4:a, 40 p - 5:a

Obs! Glöm inte anmäla er

Detaljerad lista med kursmål på hemsidan

Duggor Möbius (tidigare Maple TA)

3 st, 1 bonuspoäng/dugga

- Dugga 1: tor lv2 13:00 – mån lv4 18:00.
- Dugga 2: tor lv4 13:00 – mån lv6 18:00.
- Dugga 3: tor lv6 13:00 – fre lv8 18:00.

Studentrepresentanter

Deniz Akin (TIMAL)

Hannes Erikson (TKDAT)

Edward Jansson (TIELL)

Linus Lycke (TIEPL)

Johan Semmingsson (TIMAL)

Möten lv2,lv5 och efter avslutad kurs.

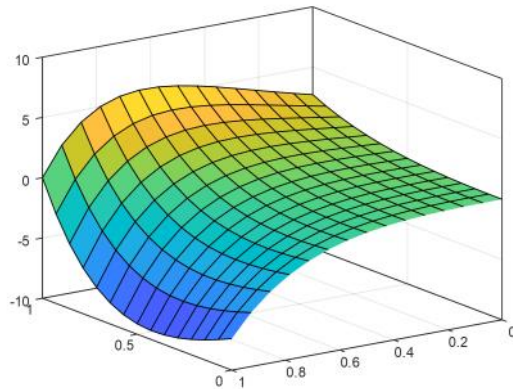
Mattesupport

- Lindholmen, Kuggen, tis 16:00-18:00
- Johanneberg, Biblioteket, ons, tor 17:00-19:00

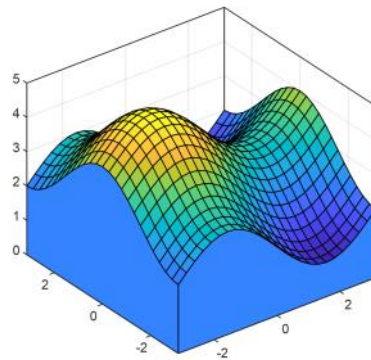
Kursinnehåll

Exempel på frågor som kursen går igenom hur man löser:

- 1) Om man har funktionen $f(x, y) = e^{x+2y}(x^2 - y^2)$, vad är dess största och minsta värde då $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$?



- 2) Vad är arean av ytan $z = 3 - \sin(x) - \cos(y)$, $-\pi \leq x \leq \pi, -\pi \leq y \leq \pi$, och vad är volymen av området under den ytan?

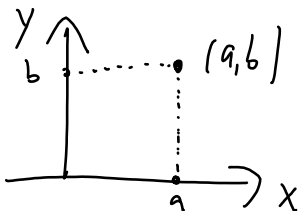


- 3) Om temperaturen på varje punkt på jordytan är given, vad är medeltemperaturen?
- 4) Om vatten strömmar genom en bassäng och dess hastighet är given, hur mycket vatten passerar en viss yta?

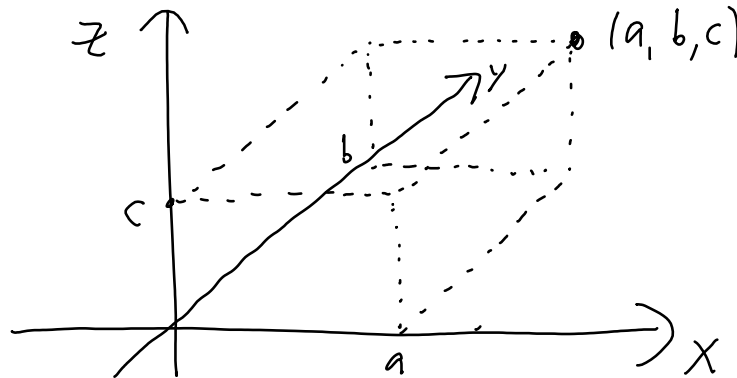
Inledning

Punkter i

- planet $\mathbb{R}^2$ beskrivs med två koordinater, oftast (x, y)



- rummet $\mathbb{R}^3$ beskrivs med tre koordinater, oftast (x, y, z)



(Ritar nästan alltid pos. z-axeln uppåt,
roterar ibland 90° i xy-planet för enklare figurer)

I envariabelanalys, studerade funktioner $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
naturligt studera vektorvärda funktioner $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$f = \langle f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m) \rangle.$$

n komponenter

m variabler

För allmänt. | kursen viktiga specialfall:

- $m=1, n=2,3 \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(t) = \langle f_1(t), f_2(t) \rangle \in \mathbb{R}^2$

idag + lv. 3 1 variabel t bestämmer
2 komponenter $f_1(t), f_2(t)$.

(Kommer ofta ta fallet $n=2$ el. $m=2$ för kortare skriva,
generaliserar för det mesta enkelt till 3 eller fler
variabler/komponenter)

- $m=2,3, n=1 \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y) \in \mathbb{R}$

imorgon - lv. 5 2 variabler x,y bestämmer ett tal $f(x,y)$.

- $n=m=2,3 \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

lv 6-7 kallas vektorfält.

Kurvor i rummet och planet 13.1

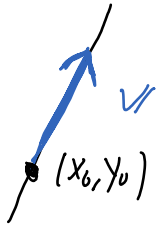
Def En kurva C i planet är alla punkter
vars position ges av

$$r(t) = \langle x(t), y(t) \rangle \quad (r \text{ är } r \text{ i "fetstil"})$$

där $x(t), y(t)$ kont. funktioner på ett intervall.

$r(t)$ kallas en parametrisering av C

Ex



En rät linje genom en punkt (x_0, y_0) med riktningsvektor $v = \langle v_1, v_2 \rangle$ är en kurva som kan parametriseras av

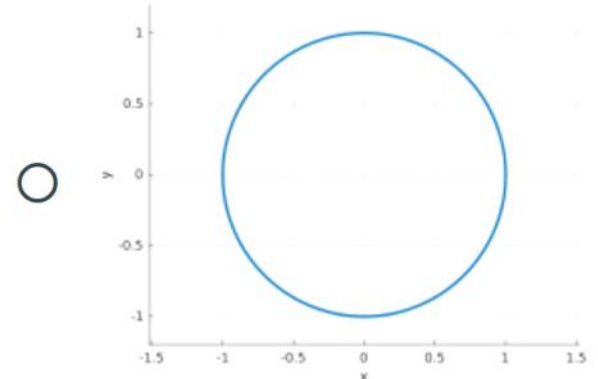
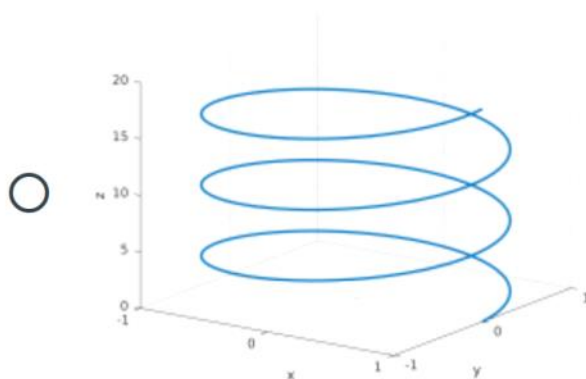
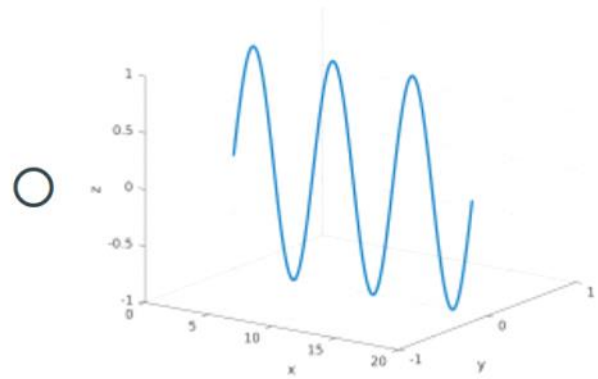
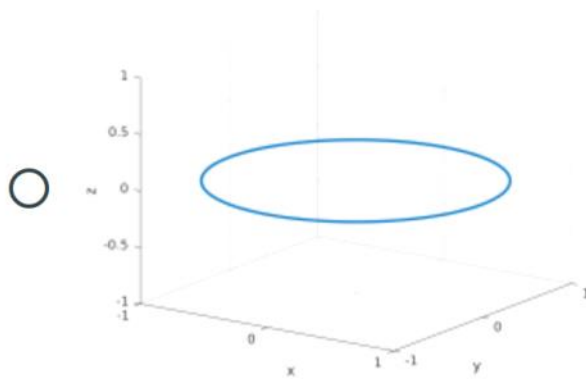
$$r(t) = \langle x_0 + t v_1, y_0 + t v_2 \rangle$$

(Om byter v mot t.ex. $-v$ eller $2v$,
får samma kurva, men annan parametrisering)

(dvs. kurvan C består av punkterna, parametriseringen beskriver hur går längs punkterna.)

Motsvarande för kurvor i rummet.

Vilken av följande figurer visar kurvan som ges av $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$?

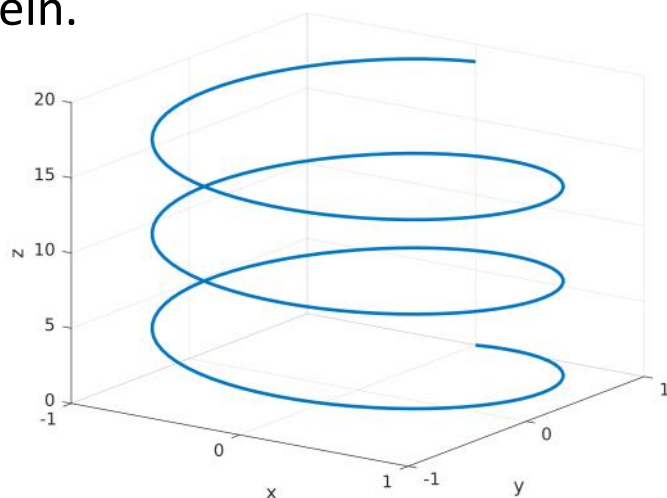


Om $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$ och t ökar med konstant fart så

a) $z = t$ ökar med konstant fart

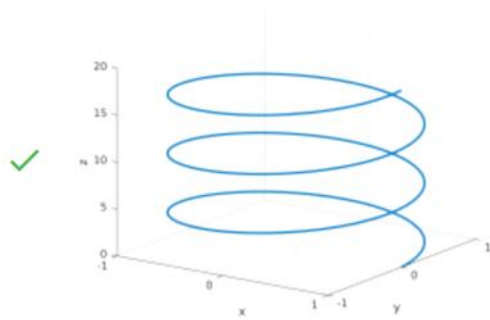
b) $\langle x, y \rangle = \langle \cos t, \sin t \rangle$ går motsols med konstant fart längs enhetscirkeln.

Ger spiral.

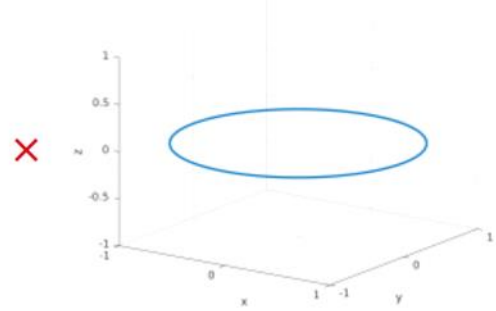


Klassens svar:

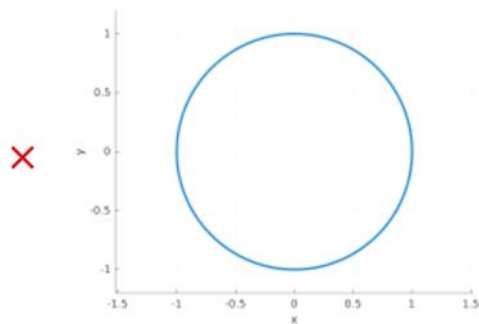
Vilken av följande figurer visar kurvan som ges av $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$?



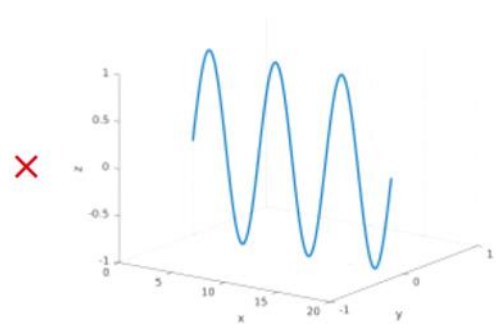
72%



17%



2%



9%

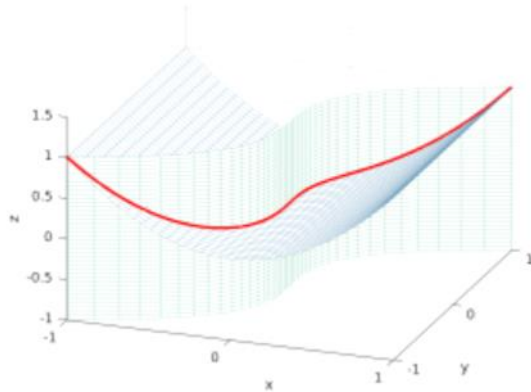
Vilken av följande kurvor ger en parametrisering av skärningen av ytorna $z = x^3$ och $x = y^2$?

Correct answers

☐ $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$

☐ $\mathbf{r}(t) = \langle t^3, t, t^2 \rangle$

☐ $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t, t^6 \rangle$



Om (x, y, z) ligger på skärningen av $x = y^2$ och $z = x^3$ är $x = y^2$

$$z = x^3 = \{x = y^2\} = (y^2)^3 = y^6.$$

Så x och z bestäms av y . Kan då använda y som parameter, dvs kurvan kan parametreras av

$$\mathbf{r}(y) = \langle y^2, y, y^6 \rangle, y \in \mathbb{R}$$

Inför ofta nytt namn på parametern:

$$\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t, t^6 \rangle, t \in \mathbb{R}$$

Klassens svar:

✓ $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t, t^6 \rangle$ 40%

✗ $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ 37%

✗ $\mathbf{r}(t) = \langle t^3, t, t^2 \rangle$ 24%

Om $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$ def. för t nära t_0 så ges gränsvärdet av $\mathbf{r}(t)$ när t går mot t_0 av:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \left\langle \lim_{t \rightarrow t_0} x(t), \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) \right\rangle$$

om gränsv. i högerledet existerar.

(Behövs för följande definition)

Derivator av vektorvärda funktioner och tangentlinjer, 13.2

Def Derivatan av $\mathbf{r}(t)$ ges av

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

om gränsvärdet existerar.

Om $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$, $x(t), y(t)$ deriverbara så är

$$\mathbf{r}'(t) = \left\langle \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \right\rangle = \langle x'(t), y'(t) \rangle$$

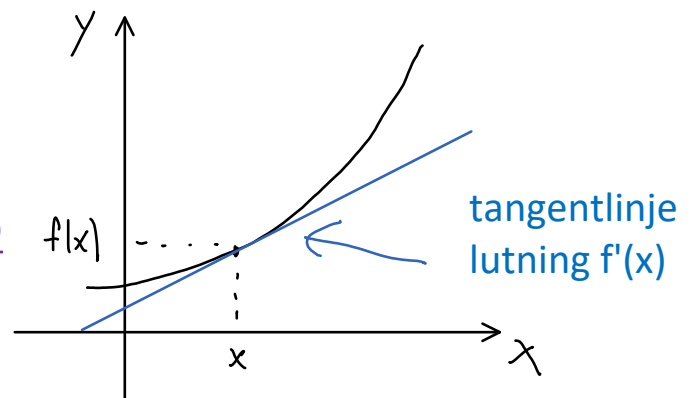
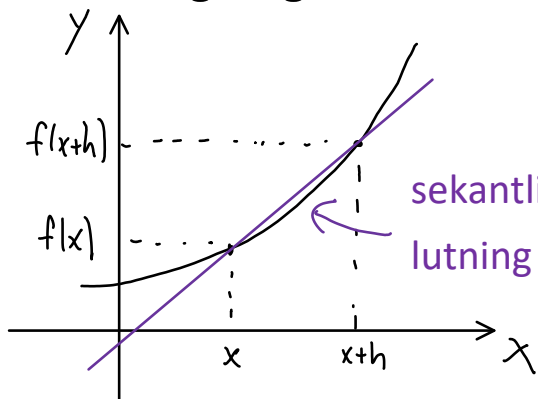
$\uparrow$ (def. av gränsv. v vektorvärd funktion) $\uparrow$ (def. av derivata)

Ex Låt $\mathbf{r}(t) = \langle 2t, \sqrt{t} \rangle$. Beräkna $\mathbf{r}'(t)$

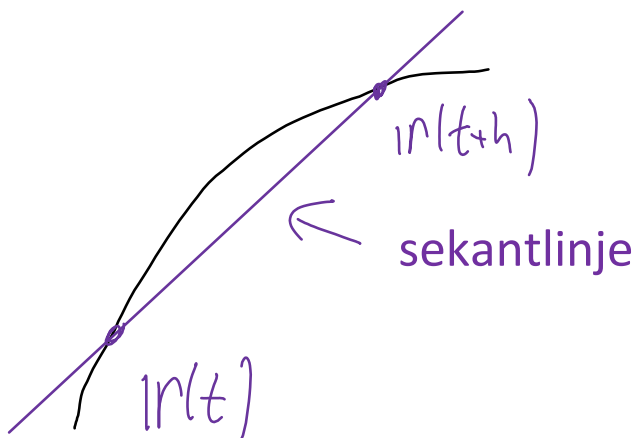
$$\mathbf{r}'(t) = \left\langle \frac{d}{dt} 2t, \frac{d}{dt} \sqrt{t} \right\rangle = \left\langle 2, \frac{1}{2\sqrt{t}} \right\rangle.$$

Geometrisk innebörd av $r'(t)$

Påminnelse: Derivatans är lutningen av tangentlinjen vars lutning är gränsvärdet av lutningen av sekantlinjer



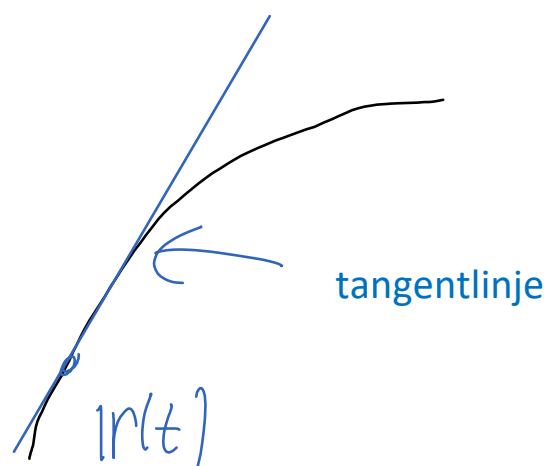
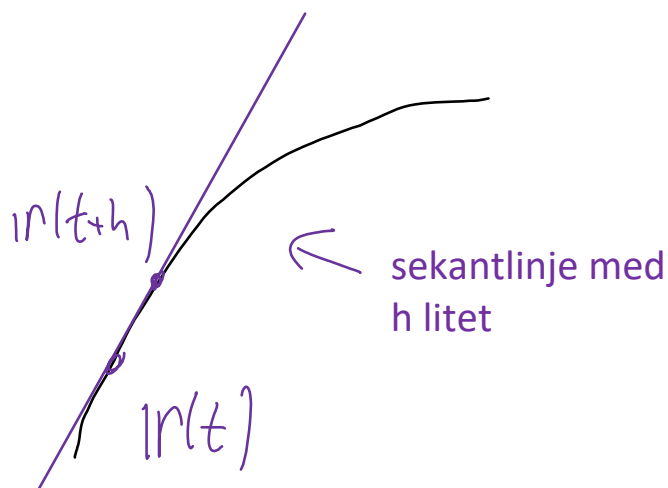
Kan göra motsvarande med sekantlinjen mellan $r(t)$ och $r(t+h)$



riktningsvektor $r(t+h) - r(t)$
eller $\frac{r(t+h) - r(t)}{h}$

(multiplar av riktningsvektor till linje ger samma linje)

Om låter $h \rightarrow 0$, får riktningsvektor $r'(t)$ som är gränsvärdet av riktningsvektorer för sekantlinjerna.



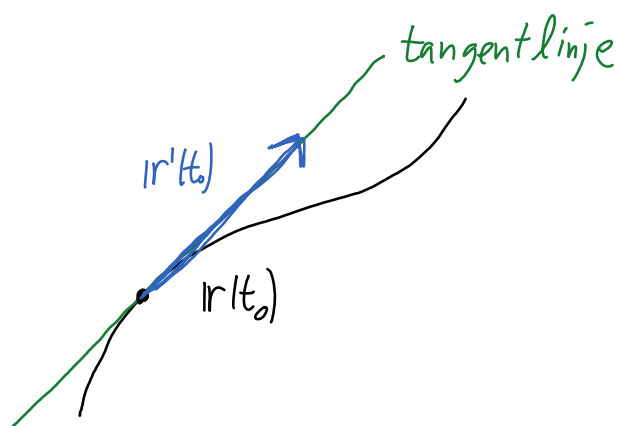
Inför därför:

Def $r'(t)$ kallas tangentvektor till $r(t)$ och linjen genom punkten $P = r(t_0)$ med riktningsvektor $r'(t_0)$ kallas tangentlinjen till r i P .

(Är den rätta linje som "är närmast" r nära P)

Tangentlinjen ges av

$$L(t) = r(t_0) + t r'(t_0)$$



Ex Bestäm tangentlinjen till $r(t) = \langle 2t, \sqrt{t} \rangle$ i punkten $P = r(4) = \langle 4, \sqrt{4} \rangle = \langle 4, 2 \rangle$.

Tangentvektor: $r'(t) = \langle 2, \frac{1}{2\sqrt{t}} \rangle$

$$r'(4) = \langle 2, \frac{1}{2\sqrt{4}} \rangle = \langle 2, \frac{1}{4} \rangle$$

Tangentlinje $L(t) = \langle 8, 2 \rangle + t \langle 2, \frac{1}{4} \rangle = \langle 8+2t, 2+\frac{t}{4} \rangle$