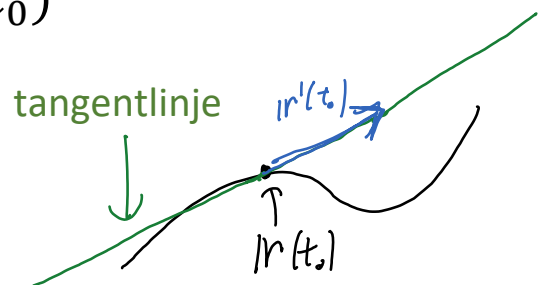
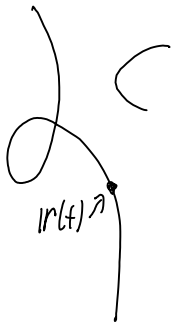


Sammanfattning Föreläsning 1

- En *kurva* C är ett geometriskt objekt som beskrivs med *en* parameter, vilken ges som alla punkter med positionsvektor
 $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$ eller $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$
- Funktionen $\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eller $\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ kallas en *parametrisering* av C och beror alltså på en variabel och har två eller tre komponenter
- *Derivatan* eller *tangentvektorn* till $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$ i t_0 är $\mathbf{r}'(t_0) = \langle x'(t_0), y'(t_0) \rangle$
 (om funktionerna är deriverbara)
- *Tangentlinjen* till $\mathbf{r}$ i $\mathbf{r}(t_0)$ är linjen som innehåller $\mathbf{r}(t_0)$ med riktningsvektor $\mathbf{r}'(t_0)$ och kan parametriseras av

$$L(t) = \mathbf{r}(t_0) + t\mathbf{r}'(t_0)$$



Funktioner av flera variabler 14.1

Def En (reellvärd) funktion av två variabler är en regel som till varje (x,y) i någon mängd $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ger ett reellt tal $f(x,y)$.
"delmängd av"

D kallas definitionsomängd (domain) till f och $\{f(x,y) \mid (x,y) \in D\}$ kallas värdomängd (range) till f .

Skriver: $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Ex 1) Mest grundläggande: koordinatfunktionerna x och y .

2) Om $f(x,y), g(x,y)$ funktioner, kan skapa nya funktioner:

$$f(x,y) + g(x,y), \quad f(x,y) \cdot g(x,y), \quad \frac{f(x,y)}{g(x,y)} \leftarrow \text{där } g(x,y) \neq 0$$

$$\sin(f(x,y)), \dots,$$

$$\sqrt{f(x,y)}, \ln(f(x,y)) \text{ där } f(x,y) \geq 0 \text{ resp. } > 0.$$

Vilken av följande är definitionsmängden till $f(x, y) = \sqrt{x + y}$?

Correct answers

- ☐ $\{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$
- ☐ $\mathbb{R}^2$
- ☐ $\{(x, y) \mid x + y \geq 0\}$
- ☐ $\mathbb{R}$

Kvadratroten är definierad för tal ≥ 0 , så f definierad om $x + y \geq 0$.

- | | | |
|---|--------------------------------------|-----|
| ✓ | $\{(x, y) \mid x + y \geq 0\}$ | 72% |
| ✗ | $\mathbb{R}^2$ | 20% |
| ✗ | $\{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ | 7% |
| ✗ | $\mathbb{R}$ | 1% |

Vilken av följande är värdemängden till $f(x, y) = \sqrt{x + y}$?

Correct answers

- ☐ $\{(x, y) \mid x + y \geq 0\}$
- ☐ $\mathbb{R}^2$
- ☐ $\mathbb{R}$
- ☐ $\{t \mid t \geq 0\}$

Kvadratroten är alltid ≥ 0 , så värdemängden är innehållen i $\{t \mid t \geq 0\}$. Blir också hela detta eftersom om $t \geq 0$ så är t.ex. $t = \sqrt{t^2 + 0} = f(t^2, 0)$.

- | | | |
|---|--------------------------------|-----|
| ✗ | $\{(x, y) \mid x + y \geq 0\}$ | 46% |
| ✓ | $\{t \mid t \geq 0\}$ | 30% |
| ✗ | $\mathbb{R}^2$ | 19% |
| ✗ | $\mathbb{R}$ | 4% |

(Hur förstå? Följande kan vara till hjälp)

Def Grafen till $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är alla punkter
 $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ s. a.

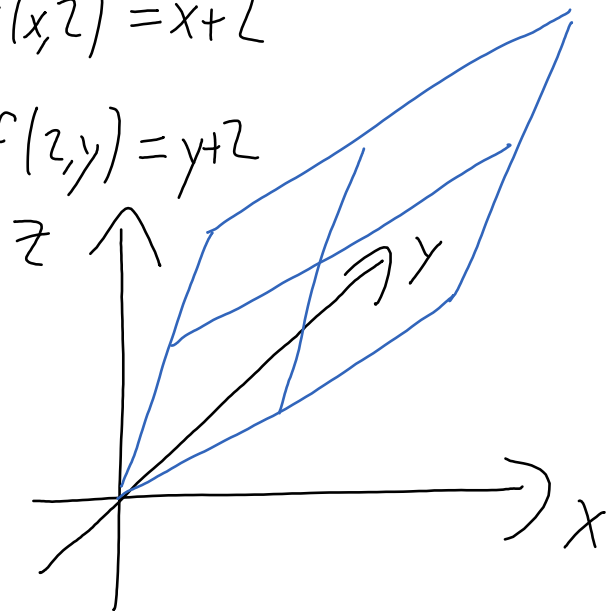
$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D.$$

Ex Rita grafen till $f(x, y) = x + y$

Ritar längs några rätta linjer

$$f(x, 0) = x, \quad f(x, 1) = x + 1, \quad f(x, 2) = x + 2$$

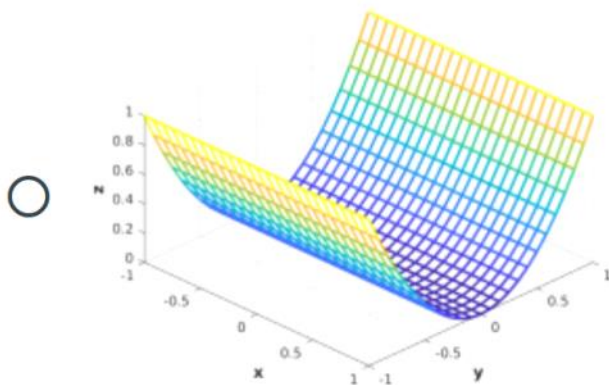
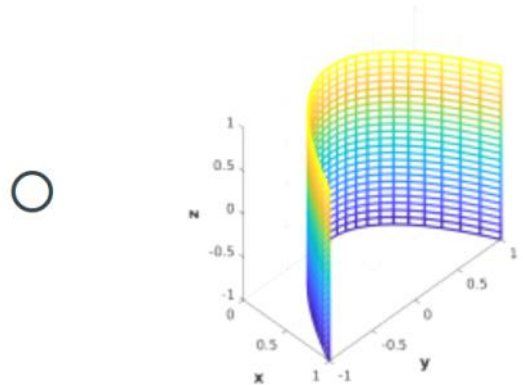
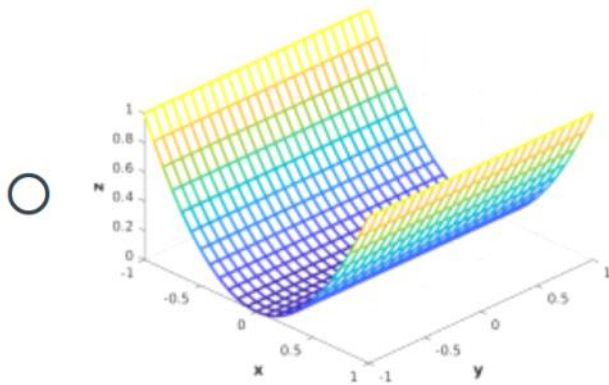
$$f(0, y) = y, \quad f(1, y) = y + 1, \quad f(2, y) = y + 2$$



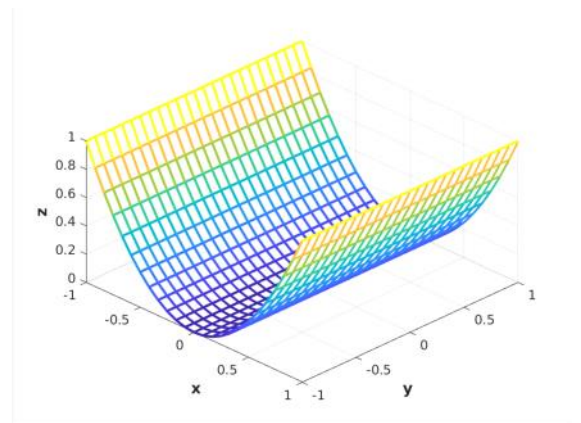
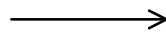
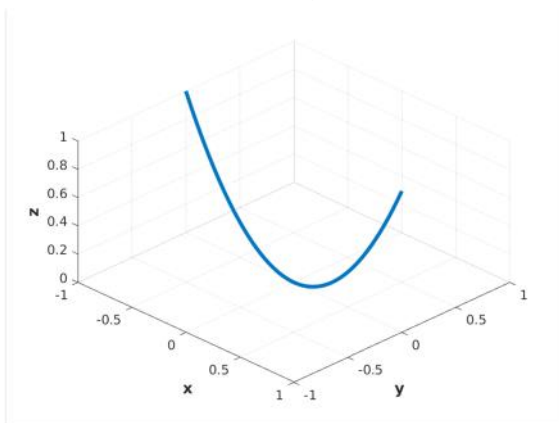
(Ger bra bild eftersom f linjär.
Förutom i speciella fall, svårt visualisera
utan dator)

Vilken är grafen till funktionen $f(x, y) = x^2$, $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$?

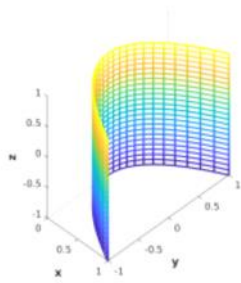
Correct answers



Funktionen $f(x, y) = x^2$ beror bara på x , så för att rita grafen, räcker rita $z = x^2$ för t.ex. $y = 0$, och sedan förskjuta i y -led.

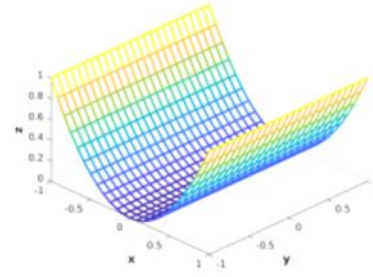


✗



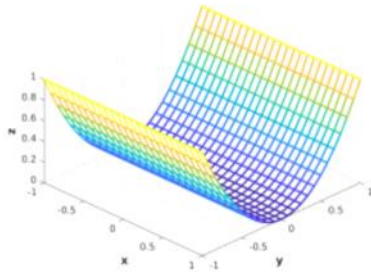
24%

✓



67%

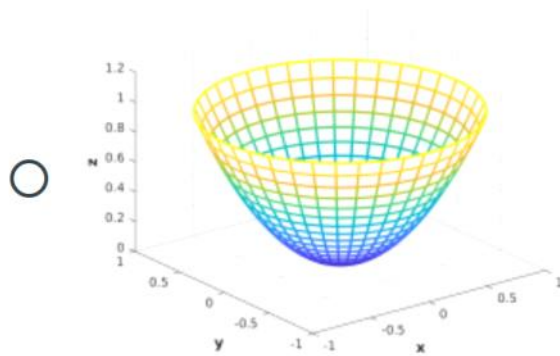
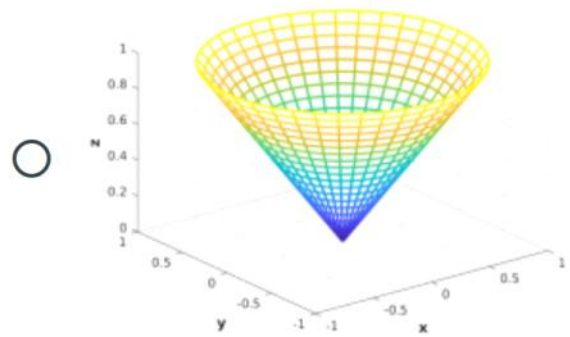
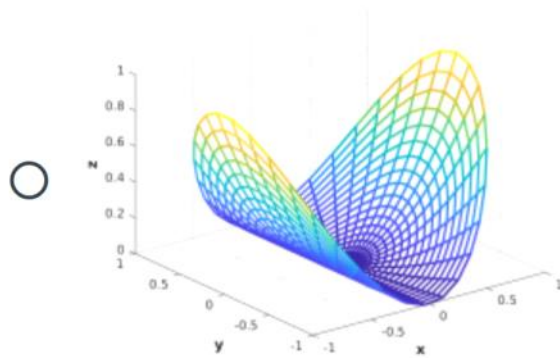
✗



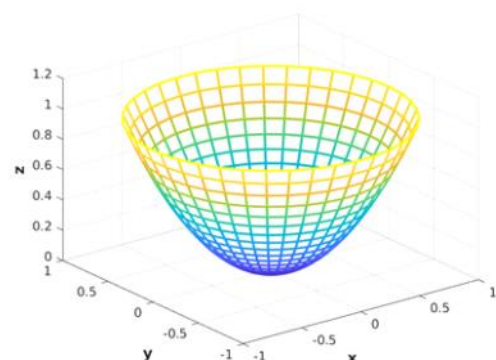
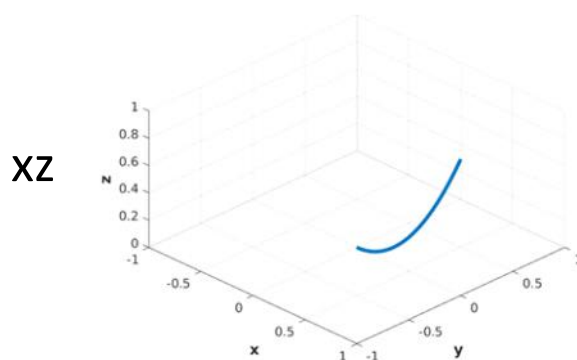
9%

Vilken är grafen till funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2$, $(x, y) \in D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$?

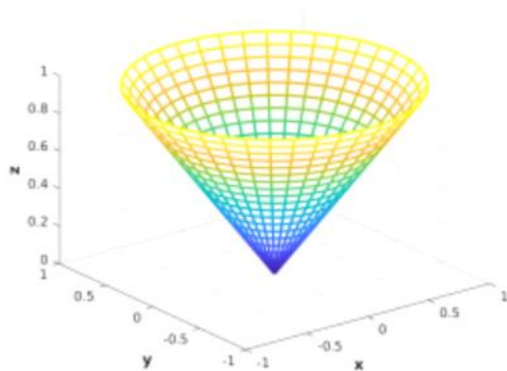
Correct answers



Avståndet från (x, y) till origo är $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, så $f(x, y) = x^2 + y^2 = r^2$, som inte beror på vinkeln θ mot positiva x -axeln. Det räcker alltså att rita grafen $z = f(x, 0) = x^2$ längs positiva x -axeln, där $x = r$, och sedan rotera kring z -axeln.

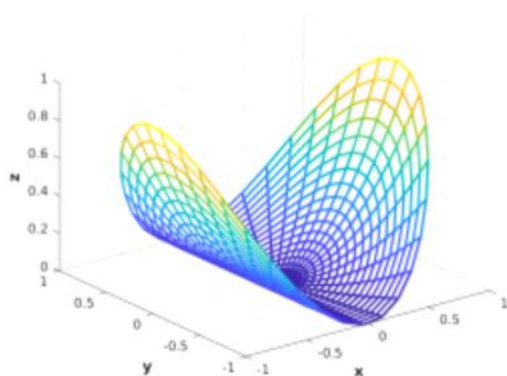


✗



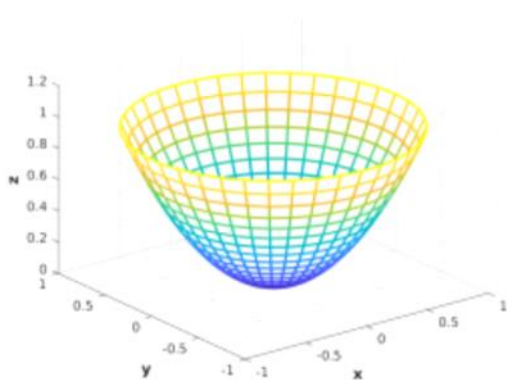
13%

✗



8%

✓



79%

Annat sätt att visualisera en funktion:

Def En nivåkurva till en funktion $f(x,y)$ är alla punkter (x,y) s.a. $f(x,y)=k$ för ett givet $k \in \mathbb{R}$.

Ritar man nivåkurvor för olika värden av k får man en höjdkarta (contour map) som kan användas för att bättre förstå en funktion.

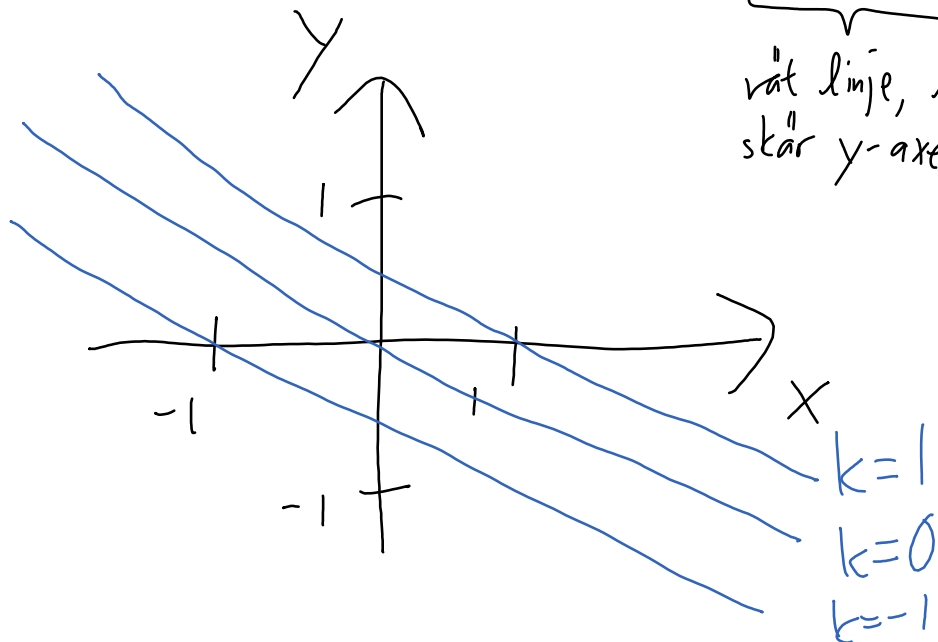
(Finns i orienterings- eller fjällkartor, för funktionen)
som är nivån över havsytan.

Ex Beskriv nivåkurvorna och rita höjdkartor för

- a) $f(x,y) = x+2y$
- b) $f(x,y) = x^2+y^2$
- c) $f(x,y) = e^{xy}$

a) Nivåkurvor: $f(x,y) = x+2y = k \Leftrightarrow y = -\frac{x}{2} + \frac{k}{2}$

rät linje, lutning $-\frac{1}{2}$,
skär y-axeln i $\frac{k}{2}$

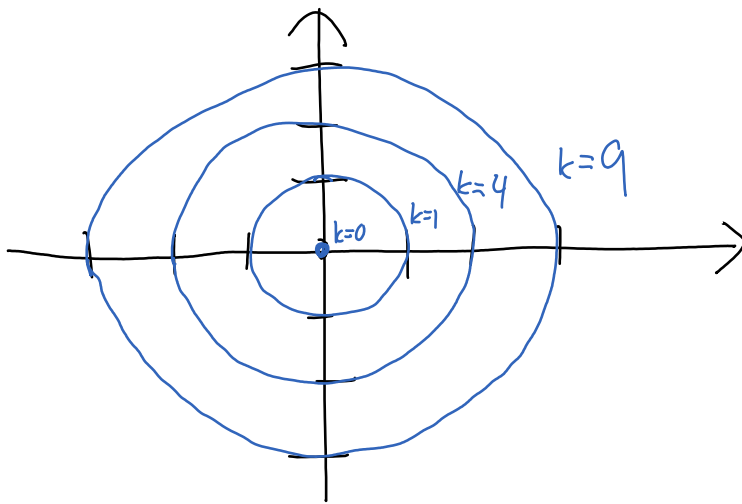


b) Nivåkurvor:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 = k \quad (\text{väsentligt olika om } k < 0 \text{ el. } k \geq 0)$$

Om $k < 0$ tom!

Om $k \geq 0$ $x^2 + y^2 = k = (\sqrt{k})^2$
cirkel radie $\sqrt{k}$, centrum origo.
(bara origo om $k = 0$)



(kunde också valt t.ex. $k = 0, 1, 2, 3$ osv. skulle
hamna närmare och närmare desto större k är)

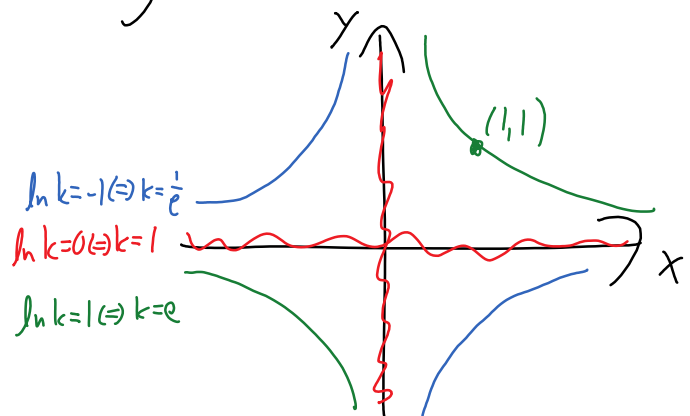
c) Nivåkurvor $f(x,y) = e^{xy} = k$, $e^{xy} > 0$
så tom om $k \leq 0$.

om $k > 0$, kan ta logaritm av båda sidor:

$$xy = \ln k$$

Two fall:

- 1) om $x \neq 0$: $y = \frac{\ln k}{x}$
- 2) om $x = 0$: $0 = \ln k$
 $(\Rightarrow k = 1)$



Man kan på liknande sätt studera funktioner $f(x,y,z)$ av tre variabler,

men: Grafen $w=f(x,y,z)$ befinner sig i ett rum med fyra dimensioner, kan inte rita upp.

däremot: Nivåytor $f(x,y,z)=k$ kan (i vissa enkla fall) visualiseras

Ex Beskriv nivåytorna till $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2 = (\text{avståndet från } (x,y,z) \text{ till origo})^2$$

$\Rightarrow$ nivåytan $f(x,y,z)=k$ är

$\left\{ \begin{array}{ll} \text{en sfär av radie } \sqrt{k}, \text{ centrum i origo} & \text{om } k \geq 0 \\ \text{tom} & \text{om } k < 0 \end{array} \right.$