

Sammanfattning Föreläsning 3

- Gränsvärde av funktioner $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$ om
*"f(x, y) kommer hur nära L som helst,
så länge (x, y) är tillräckligt nära (a, b)"* (informell definition)
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L, \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) = M \Rightarrow$
 $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) + g(x,y) = L + M$ osv.
- $f(x,y)$ kontinuerlig i (a,b) om $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b)$

Gränsvärden och kontinuitet (farts.)

Från räknereglererna för gränsv. följer att om $f(x,y)$, $g(x,y)$ och $h(t)$ är kont. så är

$f+g$, $f \cdot g$, $h(f(x,y))$, f/g kont.

(den sista av dem på sin def. mängd $\{(x,y) \mid g(x,y) \neq 0\}$)

Ex a) x och $1+y^2$ är kont. (enkelt från def.)

b) $\frac{x}{1+y^2}$ är kont. (kvot av kont. funktioner)

c) $e^{\frac{x}{1+y^2}}$ är kont. (sammansättning av kont. fkt. med kont. fkt. $h(t) = e^t$)

Ex Avgör om följande funktioner är kont. i $(0,0)$:

$$a) \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$b) \quad g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$a) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} = 0 \neq 1 = f(0,0) \quad \left(\begin{smallmatrix} \text{förrs.} \\ \text{föreläs.} \end{smallmatrix} \right)$$

så f ej kont. i $(0,0)$ (man skulle bli om istället def. $f(0,0) = 0$)

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ existerar ej (förva föreläsning.)

så g ej kont. i $(0,0)$

(och kan inte bli det även om man skulle def. $g(0,0)$ som något annat.)

Partiella derivator 14.3

Def $f(x,y)$ funktion. Fixera y och låt $g(x) = f(x,y)$.

Den partiella derivatan av f med avseende på x är

$$f_x(x,y) = g'(x)$$

och på samma sätt, om x fix, $h(y) = f(x,y)$ så är

$$f_y(x,y) = h'(y).$$

"Fixera alla variabler utom en, och derivera som funktion av en variabel"

Ex Beräkna $f_x(x,y)$ där $f(x,y) = x^2 + 2xy$

Betrakta y som konstant och def. $g(x) = x^2 + 2xy$.

$$f_x(x,y) = g'(x) = 2x + 2y.$$

(Brukar inte införa $g(x)$ utan bara se y som konstant,
derivera m.a.p. x och sätta in värden på x och y .)

Använder också följande beteckningar:

$$f_x = f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 \quad \left(\text{"krokigt" istället för att skilja mot} \right)$$

derivata av en variabel

$$f_y = f'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2$$

Högre derivator

Man kan derivera f_x m.a.p. x el. y och få

$$(f_x)_x, (f_x)_y, (f_y)_x, (f_y)_y \text{ osv.}$$

Man skriver $(f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}$ osv.

Clairaut's sats Om f_{xy} och f_{yx} båda existerar och är kontinuerliga nära (a,b) så är $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$

Bevis i appendix F, använder medelvärdessatsen.

Högre ordningens partiella derivator kan t.ex. beskriva fysikaliska fenomen genom partiella differentialekvationer (Ekvationer som involverar en sökt funktion och dess partiella derivator)

T.ex. Laplace's ekvation $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$
beskriver bl.a. värmeledning. $\underbrace{\phantom{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}}_{f_{xx} + f_{yy}}$

Vilka av följande funktioner uppfyller Laplace's ekvation $f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y) = 0$?

(Mer än ett svar kan vara korrekt.)

Correct answers

☐ $x^2 - y^2$

☐ $x^3 - y^3$

☐ xy

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

$$f_x = 2x, f_y = -2y$$

$$f_{xx} = (f_x)_x = 2, f_{yy} = (f_y)_y = -2$$

$$\mathbf{f_{xx} + f_{yy} = 2 - 2 = 0}$$

$$g(x, y) = x^3 - y^3$$

$$g_x = 3x^2, g_y = -3y^2$$

$$g_{xx} = (g_x)_x = 6x, g_{yy} = (g_y)_y = -6y$$

$$\mathbf{g_{xx} + g_{yy} = 6x - 6y \neq 0}$$

$$h(x, y) = xy$$

$$h_x = y, h_y = x$$

$$h_{xx} = (h_x)_x = 0, h_{yy} = (h_y)_y = 0$$

$$\mathbf{h_{xx} + h_{yy} = 0 + 0 = 0}$$

Klassens svar:

✓ $x^2 - y^2$ 46%

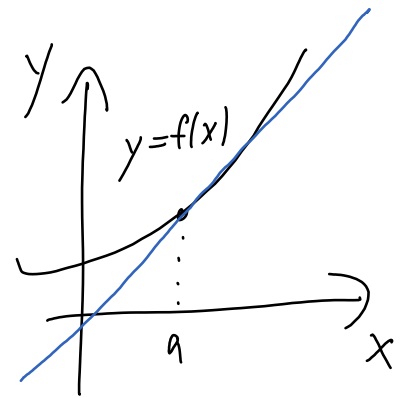
✓ xy 39%

✗ $x^3 - y^3$ 14%

(procenten är som andel av alla svar, och skulle alltså vara 50% på varje rätt svar om alla svarat rätt, inte 100%)

Tangentplan till en graf $z = f(x, y)$

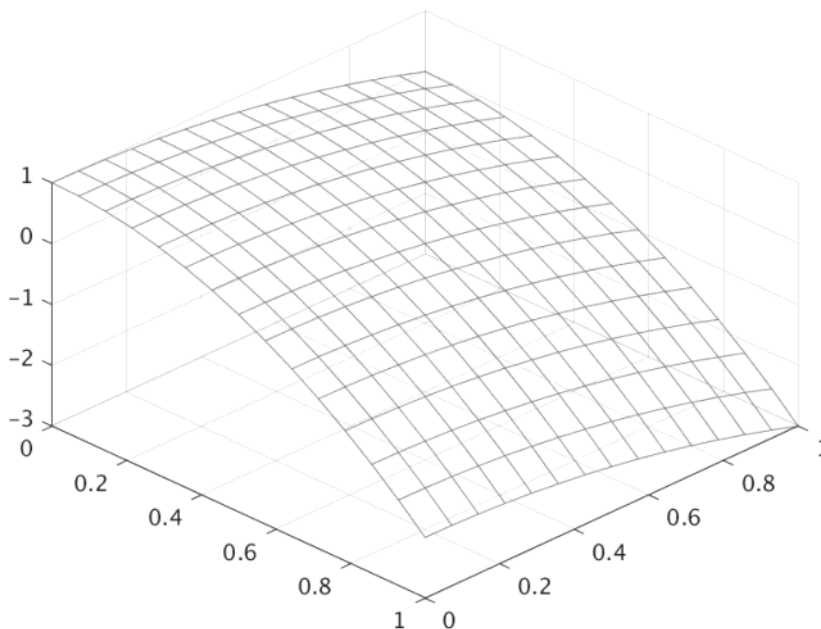
Tangentlinje till graf $y = f(x)$ kring a är
"bästa approximation av f nära a med en linje"



tangentlinje $y = f(a) + f'(a)(x - a)$

Vill göra motsvarande i två variabler:

Tangentplan till graf $z = f(x, y)$ kring (a, b)
är "bästa approximation av f nära (a, b) med ett plan"

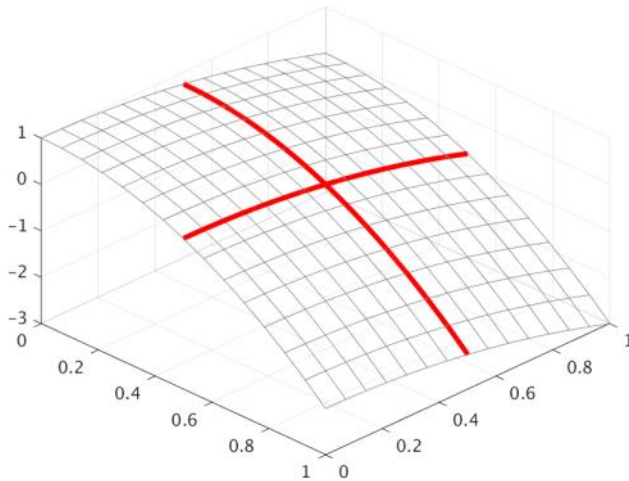


$$z = f(x, y)$$

Fixera en punkt (a, b) . Två naturliga kurvor genom (a, b) längs grafen $z = f(x, y)$ om fixerar a eller b :

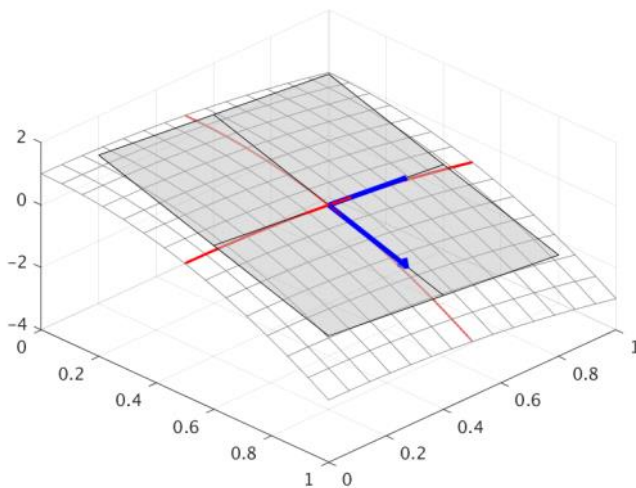
$$\mathbf{r}_1(x) = \langle x, b, f(x, b) \rangle$$

$$\mathbf{r}_2(y) = \langle a, y, f(a, y) \rangle$$



Kurvor $\mathbf{r}_1$ och $\mathbf{r}_2$ där $x = 0,5$ eller $y = 0,5$ fixerade

Tangentvektorerna $\mathbf{r}'_1(a)$ och $\mathbf{r}'_2(b)$ bör kunna användas för att ge bra approximation av f längs $\mathbf{r}_1$ och $\mathbf{r}_2$



Tangentplanet till $z = f(x, y)$ i $(0.5, 0.5)$

Tangentplan och linearisering 14.4

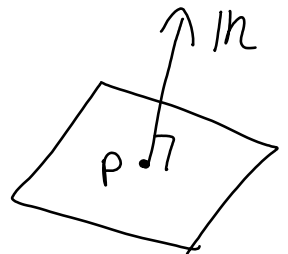
Det Tangentplanet till grafen $z=f(x,y)$ vid (a,b) är det plan genom $(a, b, f(a,b))$ som innehåller vektorerna $r_1'(a)$ och $r_2'(b)$, där

$$r_1(x) = \langle x, b, f(x,b) \rangle \text{ och } r_2(y) = \langle a, y, f(a,y) \rangle$$

Ska härleda explicit formel.

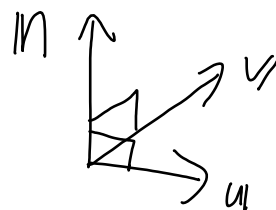
Påminnelse (Stewart, 12.4 & 12.5)

- a) Ett plan med normalvektor $n = \langle A, B, C \rangle$ genom en punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ ges av
- $$n \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$



- b) Ett plan som innehåller två (icke-parallela) vektorer $u = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ och $v = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ har normalvektor

$$n = u \times v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \langle u_2 v_3 - u_3 v_2, -u_1 v_3 + u_3 v_1, u_1 v_2 - u_2 v_1 \rangle$$



Tangentplanet innehåller

$$\mathbf{r}'_1(a) = \langle 1, 0, f_x(a, b) \rangle$$

$$\mathbf{r}'_2(b) = \langle 0, 1, f_y(a, b) \rangle$$

så dess normalvektor är

$$\begin{aligned} \mathbf{n} = \mathbf{r}'_1(a) \times \mathbf{r}'_2(b) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_x(a, b) \\ 0 & 1 & f_y(a, b) \end{vmatrix} \\ &= \langle -f_x(a, b), -f_y(a, b), 1 \rangle \end{aligned}$$

Tangentplanet ska innehålla

normalvektorn $\langle -f_x(a, b), -f_y(a, b), 1 \rangle$ och
gå genom $P = (a, b, f(a, b))$

Det ges därför av

$$\langle -f_x(a, b), -f_y(a, b), 1 \rangle \cdot \langle x - a, y - b, z - f(a, b) \rangle = 0$$

Formel för tangentplanet av grafen $z = f(x, y)$

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b).$$

z -värdet av (x, y, z) på tangentplanet bör vara
bra approximation av $f(x, y)$ om (x, y) nära (a, b) .

Ger lineariseringen av f kring (a, b) :

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b).$$

(tangentplanet blir då grafen till lineariseringen)