

Sammanfattning Föreläsning 4

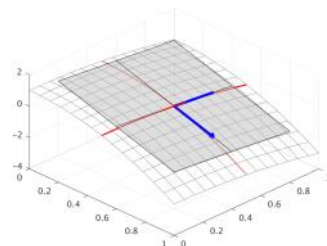
- **Partiella derivator:** $f_x(x, y) = f'_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_1(x, y)$
"se y som konstant och derivera m.a.p. x"

och $f_y(x, y) = f'_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_2(x, y)$

- **Tangentplan** för $z = f(x, y)$ kring (a, b)

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

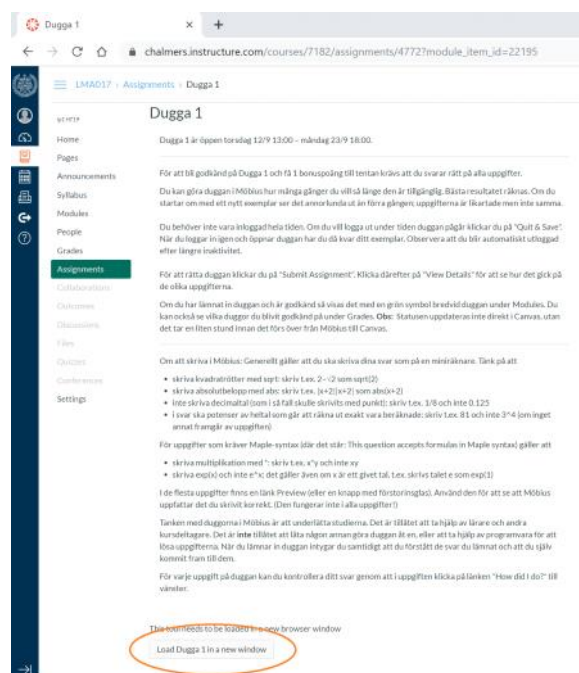
$$\underbrace{\hspace{10em}}_{=L(x,y) \text{ linearisering av } f}$$



Möbius startar idag kl 13:00,
stänger mån 23/9 kl 18:00

Kommer åt från Canvas:
Modules → Dugga 1 →
Läs informationen →
Load Dugga 1 in a new window

Obs: Teorin för att lösa sista uppgiften
går vi igenom på föreläsningen imorgon.



Tangentplan och linearisering (forts.)

Ex Beräkna tangentplanet till $z=f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ i $(3,4)$,
Bestäm också lineariseringen av f i $(3,4)$,
och använd den för att approximerar $f(3.01, 3.98)$.

$$f(3,4) = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

$$f_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f_x(3,4) = \frac{3}{5},$$

$$f_y = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f_y(3,4) = \frac{4}{5}$$

$$\text{Tangentplan: } z = 5 + \underbrace{\frac{3}{5}(x-3) + \frac{4}{5}(y-4)}_{=L(x,y) \text{ lineariseringen}}$$

$$f(3.01, 3.98) \approx L(3.01, 3.98) = 5 + \frac{3}{5} \cdot 0.01 + \frac{4}{5} \cdot (-0.02) = 4.99.$$

Verkligt värde: $f(3.01, 3.98) = 4.990040\dots$
så ger bra approximation.

(Idag: Mer om när L ger bra approximation)

Differentierbarhet 14.4

Påminnelse | en variabel, om $f'(a)$ existerar kan man visa (se föreläsningsanteckningar på kursensida) att

$$f(x) = L(x) + \varepsilon(x) \cdot (x-a),$$

$$\text{där } L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

är lineariseringen av f kring a och $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ när $x \rightarrow a$.

Slutsats: Om $f'(a)$ existerar så är L en bra approximation av f nära a , för $f(x) - L(x)$ går mot 0 snabbare än alla linjära funktioner (Och L är den enda linjära funktionen som uppfyller detta, så är bästa approximation av f med linjär funktion)

Förklaring till påst. ovan: Om löser ut $\varepsilon(x)$ ovan:

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - L(x)}{x-a} = \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a}$$

$$= \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x-a}}_{\text{går mot } f'(a)} - f'(a).$$

Eftersom $\frac{f(x) - f(a)}{x-a}$ går mot $f'(a)$ när x går mot a enl. def. av derivata får man att $\varepsilon(x) \rightarrow f'(a) - f'(a) = 0$ när $x \rightarrow a$.

Annorlunda i två variabler:

$$\underline{\text{Ex}} \quad \text{Låt} \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f(0,0)=0, \quad f_x(0,0)=0, \quad f_y(0,0)=0, \quad \text{så}$$

dess linearisering kring $(0,0)$ är

$$\underline{L(x,y)} = 0.$$

$$f(t,t) - L(t,t) = \frac{t^2}{t^2+t^2} = \frac{1}{2} \not\rightarrow 0 \quad t \rightarrow 0$$

så L är inte en bra approximation av f nära $(0,0)$ trots att $f_x(0,0)$ och $f_y(0,0)$ existerar!

(f är inte ens kont. i $(0,0)$ även om de part. derivatorna existerar i $(0,0)$.)

Många resultat bygger på att L är en bra approximation.
Inför därför:

Def f är deriverbar eller differentierbar i (a,b) om $f_x(a,b)$ och $f_y(a,b)$ existerar och man kan skriva

$$f(x,y) = \overbrace{f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)}^{L(x,y)} + \varepsilon_1(x,y)|x-a| + \varepsilon_2(x,y)|y-b|,$$

där $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ då $(x,y) \rightarrow (a,b)$.

Speciellt, $f(x,y) - L(x,y) \rightarrow 0$ när $(x,y) \rightarrow (a,b)$, så f i exemplet ovan är ej differentierbar.

(Kan vara komplicerat kontrollera direkt från def.)
(Följande sats oftast tillräcklig)

Sats Om $f_x(xy)$ och $f_y(xy)$ existerar och är kontinuerliga
på (a,b) så är f deriverbar i (a,b)

Beviset använder medelvärdessatsen, se appendix F.

(Deriverbarhet behövs för följande resultat)

Kedjeregeln 14.5

Påminnelse: Kedjeregeln i en variabel:

Om $y=f(x)$ och $x=g(t)$ är deriverbara så är

$$\frac{d}{dt} f(g(t)) = f'(g(t)) g'(t)$$

Annorlunda uttryckt $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$ (formellt kan förkortas med dx)

Kedjeregeln i två variabler (enklaste varianten)

Låt $z=f(x,y)$, $x=g(t)$, $y=h(t)$ vara deriverbara.

Då är $\frac{d}{dt} f(g(t), h(t)) = f_x(g(t), h(t)) g'(t) + f_y(g(t), h(t)) h'(t)$.

eller kortare: $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$.

(Kedjeregeln i flera variabler inte så viktig för beräkningar,
men teoretiskt mycket viktig.)

Classtime

Låt $u(t) = f(t^3 + t, 2t)$, där $f(x, y)$ är en funktion av två variabler. Vad behöver man veta värdet på för att beräkna $u'(1)$?

Correct answers

- ☐ $f_x(1)$ och $f_y(1)$
- ☐ $f_x(2, 2)$ och $f_y(2, 2)$
- ☐ $f_x(1, 1)$ och $f_y(1, 1)$
- ☐ $f(2, 2), f_x(2, 2)$ och $f_y(2, 2)$

Låt $g(t) = t^3 + t, h(t) = 2t$ så att $u(t) = f(g(t), h(t))$.

Kedjeregeln för $t = 1$:

$$u'(1) = f_x(g(1), h(1))g'(1) + f_y(g(1), h(1))h'(1).$$

Kan räkna ut $g(1), h(1), g'(1), h'(t)$

$$(g(1) = 2, h(1) = 2, g'(1) = 3 \cdot 1^2 + 1 = 4, h'(1) = 2)$$

$$u'(1) = f_x(2, 2) \cdot 4 + f_y(2, 2) \cdot 2.$$

Behöver veta värdet på dessa partiella derivator.

Klassens svar:

- | | |
|--|-----|
| ✗ $f_x(1, 1)$ och $f_y(1, 1)$ | 41% |
| ✗ $f_x(1)$ och $f_y(1)$ | 26% |
| ✗ $f(2, 2), f_x(2, 2)$ och $f_y(2, 2)$ | 19% |
| ✓ $f_x(2, 2)$ och $f_y(2, 2)$ | 15% |

Bevis av kedjeregeln

Enligt definition av deriverbarhet av f , om låter $(x, y) = (g(s), h(s))$ och $(a, b) = (g(t), h(t))$, och om delar med $s - t$:

$$\begin{aligned} & \frac{f(g(s), h(s)) - f(g(t), h(t))}{s - t} = \\ & f_x(g(t), h(t)) \frac{g(s) - g(t)}{s - t} \\ & + f_y(g(t), h(t)) \frac{h(s) - h(t)}{s - t} \\ & + \epsilon_1 \frac{g(s) - g(t)}{s - t} + \epsilon_2 \frac{h(s) - h(t)}{s - t} \end{aligned}$$

Om låter $s \rightarrow t$, får kedjeregeln:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} f(g(s), h(s)) \\ & = f_x(g(t), h(t)) g'(t) + f_y(g(t), h(t)) h'(t) \\ & + 0 \cdot g'(t) + 0 \cdot h'(t) \end{aligned}$$

Variant av kedjeregeln: $z = f(x, y)$, $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$
deriverbara:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{och} \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}.$$

(Följer av förra varianten av kedjeregeln genom att betrakta t resp. s som konstant.)

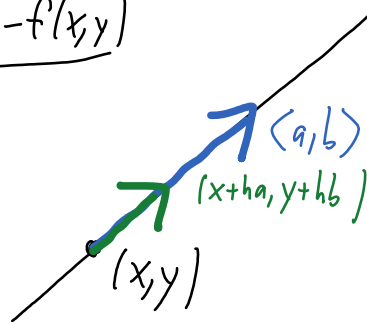
Riktningderivator och gradienter 14.6

Partiella derivator är derivator längs linjer där x el. y är konstanta, dvs längs linjer med riktningsvektor $\vec{i} = \langle 1, 0 \rangle$ el. $\vec{j} = \langle 0, 1 \rangle$.

Andra riktningar?

Def Riktningderivatan (directional derivative) av $f(x, y)$ i riktningen $\vec{u} = \langle a, b \rangle$, där $\vec{u}$ är en enhetsvektor ($\sqrt{a^2 + b^2} = 1$) är

$$D_{\vec{u}} f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+ha, y+hb) - f(x, y)}{h}$$



Anm: $f_x = D_{\vec{i}} f$, $f_y = D_{\vec{j}} f$.

(Följande kommer användas i olika sammanhang framöver)

Def Gradienten av $f(x,y)$ är $\nabla f = \langle f_x, f_y \rangle$.
("nabla f")

Sats Om f är deriverbar så är

$$D_u f = \nabla f \cdot u.$$

Bevis: Låt $g(h) = f(x+ha, y+hb)$.

Enligt kedjeregeln:

$$g'(h) = f_x(x+ah, y+bh) a + f_y(x+ah, y+bh) b$$

$$\begin{array}{lcl} \text{så} & g'(0) = f_x(x,y) a + f_y(x,y) b & \\ & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & \\ & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & = \nabla f \cdot u \\ & = D_u f & \end{array}$$