

Sammanfattning Föreläsning 5

- $f(x, y)$ **deriverbar** eller **differentierbar** i (a, b) om $f_x(a, b)$ och $f_y(a, b)$ existerar och kan skriva

$$f(x, y) = \underbrace{f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)}_{=L(x, y) \text{ linearisering av } f} + \epsilon_1(x, y)(x - a) + \epsilon_2(x, y)(y - b)$$

där $\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$ då $(x, y) \rightarrow (a, b)$.

Sats Om $f_x(x, y)$ och $f_y(a, b)$ existerar och är kontinuerliga nära (a, b) så är $f(x, y)$ deriverbar i (a, b)

- **Kedjeregeln i två variabel** (enklaste varianten)

Om $z = f(x, y)$ och $x = g(t)$ och $y = h(t)$ är deriverbara är

$$\frac{d}{dt} f(g(t), h(t)) = f_x(g(t), h(t))g'(t) + f_y(g(t), h(t))h'(t)$$

alt:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

- **Gradient** $\nabla f = \langle f_x, f_y \rangle$
- **Riktningsderivata** i riktning $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$
(enhetsvektor $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$):

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + ha, y + hb) - f(x, y)}{h} \\ &= \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u} \text{ (av kedjeregeln)} \end{aligned}$$

Riktningsderivator och gradienter (forts.)

Påminnelse (12.3)

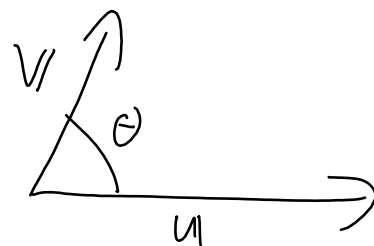
$u = \langle u_1, u_2 \rangle$, $v = \langle v_1, v_2 \rangle$ vektorer

a) skalärprodukt $u \bullet v = u_1 v_1 + u_2 v_2$

(obs: ett tal, inte en vektor)

b) längden av u är $|u| = \sqrt{u \bullet u} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

c) $u \bullet v = |u| \cdot |v| \cos \theta$, θ vinkeln mellan u och v .



d) u är vinkelrät (ortogonal) mot v
 $(\Rightarrow) u \bullet v = 0$ (följer från c)

Sats $D_u f(x,y)$ är som störst när u pekar i samma riktning som $\nabla f(x,y)$, dvs. när $u = \frac{\nabla f(x,y)}{|\nabla f(x,y)|}$

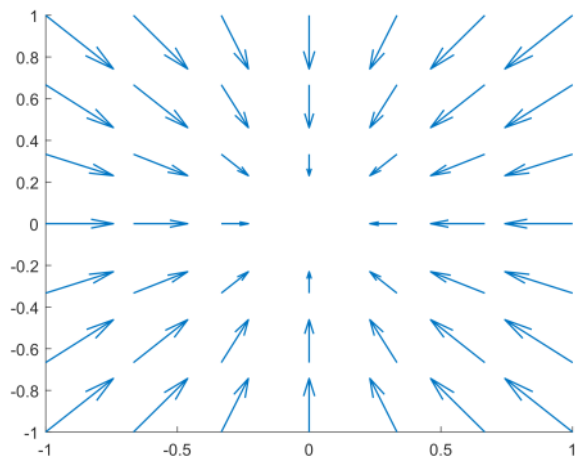
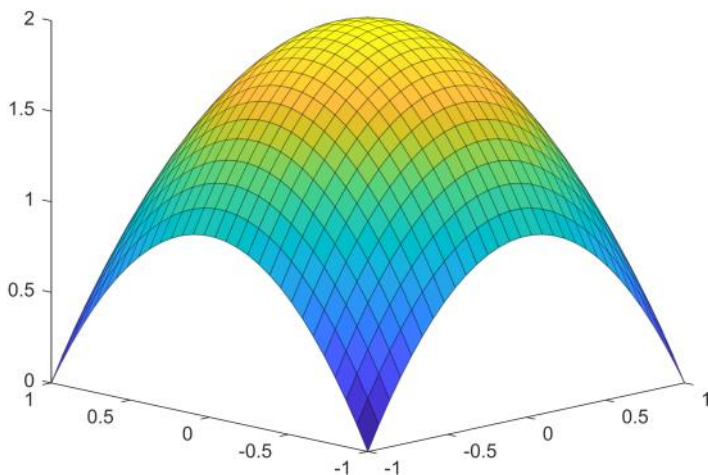
Alltså $f(x,y)$ växer som mest när (x,y) rör sig från (x_0, y_0) i riktningen $\frac{\nabla f(x_0, y_0)}{|\nabla f(x_0, y_0)|}$

Bervis: $D_u f(x,y) = u \cdot \nabla f(x,y) \underset{c)}{=} \underbrace{|u|}_{=1} \cdot |\nabla f(x,y)| \cos \theta$

där θ vinkeln mellan u och $\nabla f(x,y)$.

$|\nabla f(x,y)| \cos \theta$ blir som störst när $\cos \theta = 1$, dvs. $\theta = 0$, s.a. u och $\nabla f(x,y)$ pekar i samma riktning.

Ex Graf och gradient till $2 - x^2 - y^2$

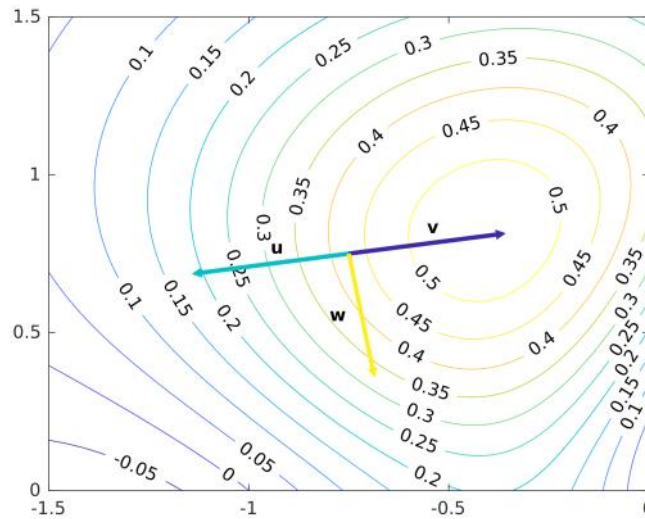


(växer mest när går mot origo)

Anm: I princip allt från denna veckan generaliserar enkelt till tre eller fler variabler.

(partiella derivator, kedjeregeln, riktningsderivator, gradient osv.)

Classtime



Grafen visar en höjdkarta för en funktion.

I vilken vektors riktning är riktningsderivatan mest negativ?

Vilken av vektorerna pekar i gradientens riktning?

Riktningsderivatan är som mest negativ i riktningen där avtar som mest, vilket är u .

Klassens svar:

✓ u 67%

✗ w 18%

✗ v 14%

Gradienten pekar i riktningen där växer mest, dvs., v .

Klassens svar:

✓ v 83%

✗ u 11%

✗ w 6%

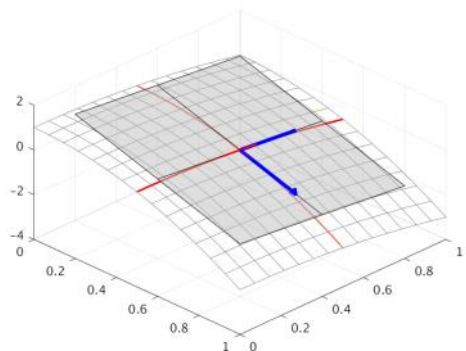
Tangentplan till nivåytor 14.6

Påminnelse

Definition Tangentplanet till $z = f(x, y)$ vid $(x, y) = (a, b)$ är det plan som går genom $(a, b, f(a, b))$ och som innehåller riktningsvektorerna $\mathbf{r}'_1(a)$ och $\mathbf{r}'_2(b)$ till kurvorna i grafen $\mathbf{r}_1(x) = \langle x, b, f(x, b) \rangle$ och $\mathbf{r}_2(y) = \langle a, y, f(a, y) \rangle$

Det ges av formeln:

$$\begin{aligned} &\langle -f_x(a, b), -f_y(a, b), 1 \rangle \cdot \\ &\langle x - a, y - b, z - f(a, b) \rangle = 0 \end{aligned}$$



En graf $z = f(x, y)$ är ett specialfall av en nivåyta
 $F(x, y, z) = k$, för kan ta $F = z - f(x, y)$ och $k = 0$.

Skall nu def. tangentplan till allmän nivåyta.

(Har inte explicita kurvor i nivåytan som $\mathbf{r}_1$ och $\mathbf{r}_2$ i grafen)

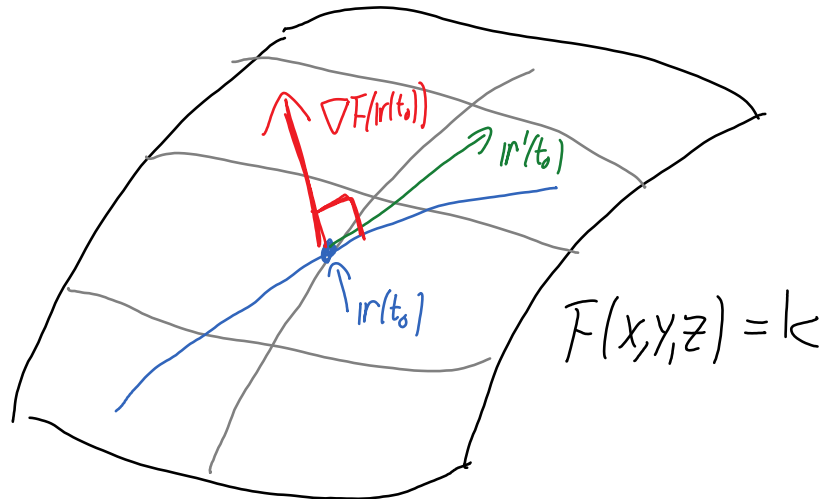
Vill def. tangentplanet till $F(x, y, z) = k$ i (x_0, y_0, z_0)
som det plan som går genom (x_0, y_0, z_0) s.a. för
varje kurva $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ som ligger i nivåytan s.a.
 $\mathbf{r}(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ så innehåller tangentplanet $\mathbf{r}'(t_0)$.

Antag $\mathbf{r}$ sådan kurva. Då är $F(x(t), y(t), z(t)) = k$.

Deriverar båda sidor m.a.p. t och använder kedjeregeln:

$$\frac{\partial F}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial F}{\partial z} z'(t) = 0 \quad (\Rightarrow \quad \nabla F(r(t)) \cdot r'(t) = 0.$$

Slutsats $\nabla F(r(t_0)) = \nabla F(x_0, y_0, z_0)$ är vinkelrät mot $r'(t_0)$.



Påminnelse: En normalvektor n till ett plan är en nollskild vektor som är vinkelrät mot alla vektorer i planet. Om planet går genom (x_0, y_0, z_0) ges det av

$$n \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = 0.$$

Def Tangentplanet till en nivåyta $F(x, y, z) = k$ i en punkt (x_0, y_0, z_0) , där $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, är

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = 0.$$

Gör att tangentplanet uppfyller vad vi ville.

(Att det vi ville verkligen bestämmer tangentplanet bygger på att man kan hitta "tillräckligt många" sådana kurvor, vilket följer av implicita funktionsatsen, som vi inte tar upp.)

Obs: Om $F(x,y,z) = z - f(x,y)$ så är nivåytan $F=0$ samma som grafen $z = f(x,y)$.

Eftersom $\nabla F = (-f_x, -f_y, 1)$ så får man samma tangentplan i en punkt $(a,b,f(a,b))$

$$\langle -f_x(a,b), -f_y(a,b), 1 \rangle \cdot \langle x-a, y-b, z-f(a,b) \rangle = 0,$$

oavsett om man ser ytan som en nivåyta eller som grafen till en funktion.

Ex Bestäm tangentplanet till ytan $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ i punkten $(1,1,1)$

Ytan är nivåyta $F(x,y,z) = 1$, där $F(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$

$$\nabla F(x,y,z) = \langle 2x, -2y, 2z \rangle \quad \nabla F(1,1,1) = \langle 2, -2, 2 \rangle.$$

Tangentplan: $\nabla F(1,1,1) \cdot \langle x-1, y-1, z-1 \rangle = 0$

$$\Leftrightarrow 2(x-1) - 2(y-1) + 2(z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - y + z = 1.$$

(Nu gått igenom allt som behövs för duggan)

Lokala extremvärden 14.7

Def $f(x,y)$ har ett lokalt maximum i (a,b) om

$$(*) \quad f(x,y) \leq f(a,b)$$

för (x,y) nära (a,b) (dvs. det gäller för (x,y) i någon cirkelstiva kring (a,b)).

$f(x,y)$ har ett globalt eller absolut maximum i (a,b) om $(*)$ gäller för alla (x,y) i def. mängden till f .

lokala och globala/absoluta minimum definieras analogt från den omvända olikheten

$$f(x,y) \geq f(a,b).$$

Ett extremvärde är ett minimum eller maximum.

Ex $f(x,y) = 3x^2 + y^2$ har ett lokalt och globalt minimum i $(0,0)$
för $f(x,y) \geq 0 = f(0,0)$ för alla (x,y) .

Påminnelse: I en variabel, om $f(x)$ deriverbar och f har ett lokalt extremvärde i a så är $f'(a) = 0$.

Sats Om $f(x,y)$ har ett lokalt extremvärde i (a,b)
och $f_x(a,b), f_y(a,b)$ existerar så är

$$f_x(a,b)=0, \quad f_y(a,b)=0.$$

Bervis: $h(x)=f(x,b)$ har ett lokalt extremvärde i $x=a$,
så $h'(a)=0$, och $h'(a)=f_x(a,b)$, så $f_x(a,b)=0$.

$f_y(a,b)=0$ visas analogt.