Sammanfattning Föreläsning 6

- **Sats** Riktningsderivatan $D_{\boldsymbol{u}} f(x,y)$ är störst när $\boldsymbol{u} = \dfrac{\nabla f(x,y)}{|\nabla f(x,y)|}$

- *Tangentplanet till nivåytan* $F(x,y,z) = k$ i punkten (x_0, y_0, z_0) ges av
$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = 0.$$

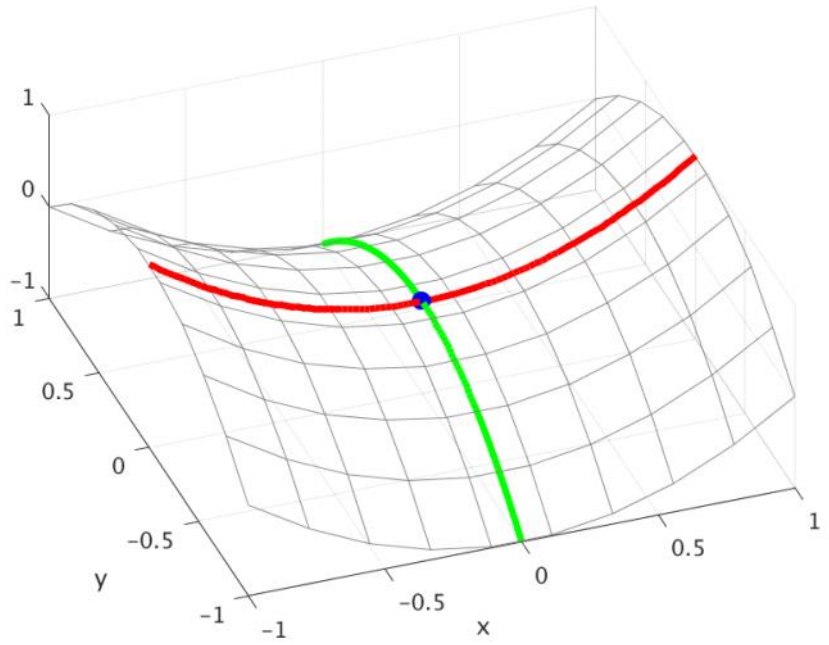
- **Sats** Punkter (a,b) med *lokala extremvärden* (lokala max/min) till $f(x,y)$ uppfyller $f_x(a,b) = 0, f_y(a,b) = 0$

Lokala extremvärden (forts.)

Def Om $f_x(a,b) = 0 = f_y(a,b)$ säger man att f har en kritisk punkt eller stationär punkt i (a,b).

Alla lokala extremvärden är kritiska punkter (om partiella derivatorna existerar), men det kan finnas kritiska punkter som inte är lokala extremvärden. Sådana punkter kallas sadelpunkter.

Ex $f(x,y) = x^2 - y^2$ har en sadelpunkt i $(0,0)$, för $\nabla f = (2x, -2y)$ så $(0,0)$ är en kritisk punkt, men den är varken ett lok. max eller min. Grafen har formen av en "sadel".



Grafen till
$z = x^2 - y^2$

lokalt min
längs x-axeln,

lokalt max
längs y-axeln

Hur avgöra om kritiska punkter är lokala extremvärden?

Påminnelse: I en variabel, om $f'(a) = 0$ och

a) $f''(a) > 0$ har $f(x)$ lok. min i $x = a$. (ex. x^2)

b) $f''(a) < 0$ — " — max i $x = a$. (ex. $-x^2$)

(c) $f''(a) = 0$ ger inte information, ex. $x^3, \pm x^4$ har sadelpunkt resp. min/max)

Sats Antag de partiella derivatorna av ordning 2 till $f(x,y)$ är kontinuerliga nära (a,b) och att

$$f_x(a,b) = 0 = f_y(a,b).$$

Låt $D = f_{xx}(a,b) f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)^2$

a) Om $D > 0$ och $f_{xx}(a,b) > 0$ (eller $f_{yy}(a,b) > 0$) är (a,b) ett lok. min.

b) Om $D > 0$ och $f_{xx}(a,b) < 0$ (eller $f_{yy}(a,b) < 0$) är (a,b) ett lok. max.

c) Om $D < 0$ är (a,b) en sadelpunkt.

(d) Om $D = 0$ ger testet ingen information)

(Om $D > 0$ har f_{xx} och f_{yy} samma tecken och är inte 0, spelar därför ingen roll om vi tittar på f_{xx} eller f_{yy} i a) och b)).

Eftersom $f_{xy} = f_{yx}$ (Clairaut's sats) så är

$D = \det H$, där H är Hessianmatrisen $H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$.

Beviset går ut på att reducera till testet i en variabel, se slutet av avsn. 14.7.

För att komma ihåg vilket villkor som ger vilken slutsats kan man jämföra med följande modellfall:

a) $f(x,y) = x^2+y^2$ lok. min i $(0,0)$.

$D = 2\cdot 2 - 0\cdot 0 = 4 > 0, \quad f_{xx} = 2 > 0.$

b) $f(x,y) = -x^2-y^2$ lok. max i $(0,0)$

$D = (-2)(-2) - 0\cdot 0 = 4 > 0, \quad f_{xx} = -2 < 0.$

c) $f(x,y) = x^2-y^2$ sadelpunkt i $(0,0)$,

$D = 2\cdot(-2) - 0\cdot 0 = -4 < 0.$

Vilket av följande innebär att en funktion $f(x,y)$ har ett lokalt minimum i en kritisk punkt (a,b)?

Vilket av följande innebär att en funktion $f(x,y)$ har en sadelpunkt i en kritisk punkt (a,b)?

(Flera svar kan vara korrekta)

- ☐ $f_{xx}(a,b) = 0, f_{xy}(a,b) > 0, f_{yy}(a,b) > 0$
- ☐ $f_{xx}(a,b) > 0, f_{xy}(a,b) = 0, f_{yy}(a,b) > 0$
- ☐ $f_{xx}(a,b) > 0, f_{xy}(a,b) = 0, f_{yy}(a,b) < 0$

$f_{xx}(a,b) = 0, f_{xy}(a,b) > 0, f_{yy}(a,b) > 0$
$\Rightarrow D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -f_{xy}^2 < 0$
Sadelpunkt

$f_{xx}(a,b) > 0, f_{xy}(a,b) = 0, f_{yy}(a,b) > 0$
$\Rightarrow D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = f_{xx}f_{yy} > 0$
Lokalt min

$f_{xx}(a,b) > 0, f_{xy}(a,b) = 0, f_{yy}(a,b) < 0$
$\Rightarrow D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = f_{xx}f_{yy} < 0$
Sadelpunkt

Klassens svar:
Lokalt minimum:

- ✓ $f_{xx}(a,b) > 0, f_{xy}(a,b) = 0, f_{yy}(a,b) > 0$ 76%
- ✗ $f_{xx}(a,b) = 0, f_{xy}(a,b) > 0, f_{yy}(a,b) > 0$ 12%
- ✗ $f_{xx}(a,b) > 0, f_{xy}(a,b) = 0, f_{yy}(a,b) < 0$ 12%

Sadelpunkt:

- ✓ $f_{xx}(a,b) > 0, f_{xy}(a,b) = 0, f_{yy}(a,b) < 0$ 49%
- ✓ $f_{xx}(a,b) = 0, f_{xy}(a,b) > 0, f_{yy}(a,b) > 0$ 40%
- ✗ $f_{xx}(a,b) > 0, f_{xy}(a,b) = 0, f_{yy}(a,b) > 0$ 11%

Ex Bestäm de kritiska punkterna till

$f(x,y) = 3x^2 + 6xy - y^3$

och avgör ifall de är lok. max/min eller sadelpunkter.

Kritiska punkter

$$\begin{cases} f_x = 6x+6y=0 \iff x=-y \quad (1) \\ f_y = 6x-3y^2 \iff 2x-y^2=0 \quad (2) \end{cases}$$

Sätter in (1) i (2):

$$-2y-y^2=0 \iff y(-2-y)=0 \iff y=0 \text{ el. } y=-2.$$

Sätter in detta i (1): $y=0 \Rightarrow x=-0=0$

$y=-2 \Rightarrow x=-(-2)=2.$

Kritiska punkter $(0,0)$ och $(2,-2)$.

Undersöker kritiska punkter:

$$f_{xx}=6 \qquad f_{xy}=6 \qquad f_{yy}=-6y$$

(0,0): $D(0,0) = \det H(0,0) = \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -36 < 0.$

$\Rightarrow (0,0)$ är en sadelpunkt.

(2,-2): $D(2,-2) = \det H(2,-2) = \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 6\cdot 12 - 6\cdot 6 = 36 > 0$

och $f_{xx}(2,-2)>0 \Rightarrow (-2,2)$ är ett lok. min.

(Andraderivatatestet en av få saker som måste formuleras annorlunda för att generalisera till fler variabler)

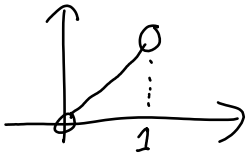
Det finns generalisering till fler variabler som bygger på s.k. egenvärden till Hessianmatrisen.
Egenvärden ingår i "Matematisk överbryggningskurs".

Globala extremvärden 14.7

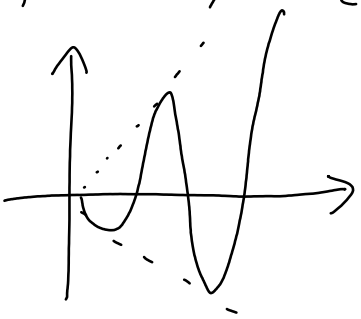
I en variabel, om $f(x)$ kont. på slutet begränsat intervall $[a,b]$ så har f globalt max och min på $[a,b]$.

Ej sant för t.ex. öppna eller obegränsade intervall:

$f(x) = x \quad x \in (0,1)$

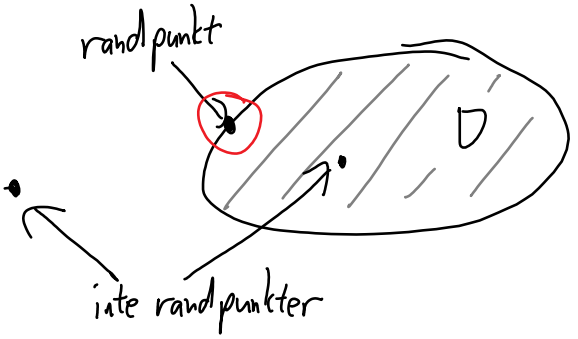


$f(x) = x \sin x, \quad x \in [0, \infty)$



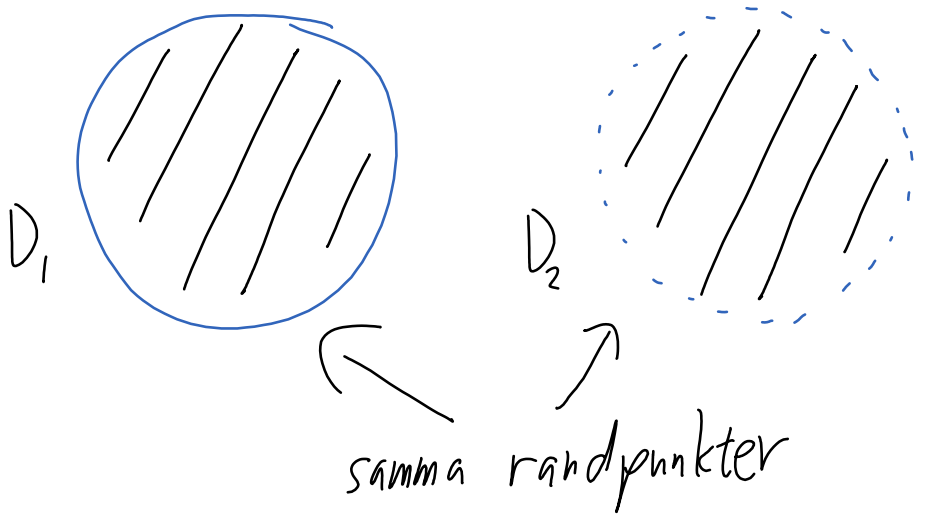
Skall nu def. motsvarighet till sluten och begränsad i två variabler.

Def (a,b) är en <u>randpunkt</u> (boundary point) till en mängd $D \subseteq \mathbb{R}^2$ om varje cirkelskiva kring (a,b) innehåller både punkter i D och punkter som inte är i D.



Ex Randpunkter till $D_1 = \{x^2+y^2 \leq 1\}$ är $\{x^2+y^2 = 1\}$

—— 11 —— $D_2 = \{x^2+y^2 < 1\}$ är också $\{x^2+y^2 = 1\}$.



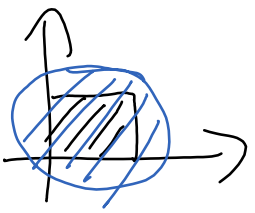
Def En mängd $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är sluten om den innehåller alla sina randpunkter.

I exemplet ovan är D_1 sluten men inte D_2.

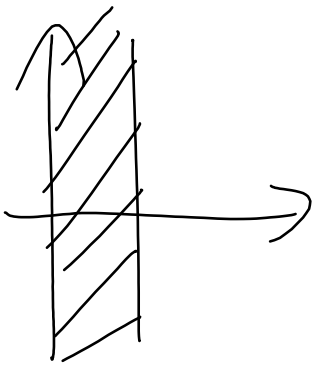
(Tumregel, om def. med $\leq, \geq$ el. $=$, blir i allmänhet sluten, men typiskt inte om def. med $<$ eller $>$.)

Def En mängd $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är begränsad om den är innehållen i någon cirkelskiva.

Ex • $\{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ är begränsad.



• $\{(x,y) \mid 0 \le x \le 1\}$ är ej begränsad.



("oändlig i y-led")

Sats Om $f(x,y)$ är kontinuerlig på $D \subseteq \mathbb{R}^2$ och D är sluten och begränsad då har f globalt max och min på D.

("djupt resultat, bygger på fundamentala egenskaper för reella tal.)