

Sammanfattning Föreläsning 7

- **Andraderivatatestet för lokala extremvärden**

$f(x, y)$ kontinuerliga partiella derivator ordning 2, låt

$$D = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2 = \begin{vmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{vmatrix}$$

Om $f_x(a, b) = 0 = f_y(a, b)$ (dvs (a, b) en kritisk punkt) och

- $D > 0$ och $f_{xx}(a, b) > 0$, då är (a, b) ett lokalt min
- $D > 0$ och $f_{xx}(a, b) < 0$, då är (a, b) ett lokalt max
- $D < 0$, då är (a, b) en sadelpunkt
- $D = 0$, då ger testet ingen information

Randpunkter till en mängd D är punkter (x, y) i $\mathbb{R}^2$ s.a. varje cirkelskiva kring (x, y) innehåller både punkter från D och punkter ej i D

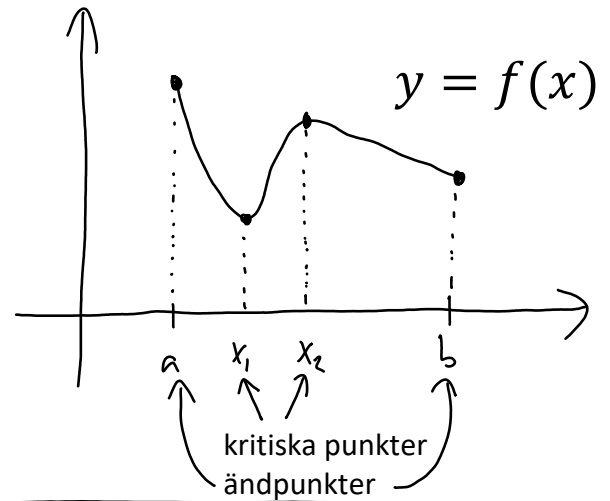
D är **sluten** om den innehåller alla sina randpunkter

D är **begränsad** om den är innehållen i någon cirkelskiva

Sats Om $f(x, y)$ är kontinuerlig på $D \subseteq \mathbb{R}^2$, där D är sluten och begränsad, då har f ett globalt max och min på D .

Påminnelse Om $f(x)$ deriverbar på ett slutet intervall $[a, b]$ så har f globalt max och min på $[a, b]$ och de kan bestämmas genom att jämföra funktionsvärden $f(x)$ i

- ändpunkter a och b
- kritiska punkter $f'(x) = 0$



Globala extremvärden (forts.)

Om $f(x, y)$ har ett globalt max i $(a, b) \in D$, och (a, b) inte är en randpunkt, då måste det vara ett lokalt max och därmed en kritisk punkt.

(Satsen om lokala extremvärden och kritiska punkter hade som förutsättning att part. derivator existerar, vilket de ej gör i randpunkter.)

Ger följande:

Metod för att bestämma globala max och min för f en deriverbar funktion på $D \subseteq \mathbb{R}^2$, D sluten och begränsad.

Globala max och min fås genom att jämföra funktionsvärden i följande kandidater:

- 1) Kritiska punkter i D
- 2) Randpunkter till D

Om man parametriserar randpunkterna till D med kurvor räcker det med följande kandidater i 2):

2.1) Kritiska punkter när man ser f som funktion av en variabel längs randkurvor.

2.2) "Hörn", dvs. ändpunkter till randkurvorna.

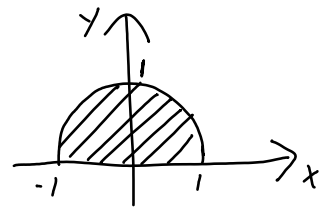
(Obs: Vilka hörnen är beror på hur man parametriserar.
Finns ofta naturliga val, men för t.ex. enhetscirkeln finns flera tänkbara varianter.)

Ex Beräkna globala max och min till

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - y$$

på området $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$.

Området är en halvcirkelskiva som är sluten och begränsad.
Kan använda metoden ovan.



1) Kritiska punkter i D :

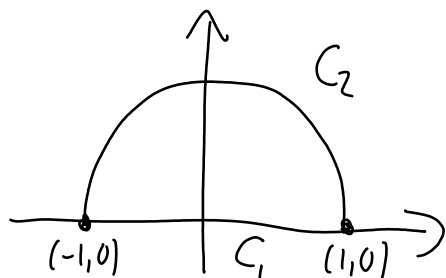
$$\begin{cases} f_x = 2x = 0 \\ f_y = 2y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (0, \frac{1}{2}) \quad (\text{Obs! ligger i } D).$$

Kandidat:

$$f(0, \frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$$

2) Parametriserar randen:

$$C_1: r_1(t) = \langle t, 0 \rangle, -1 < t < 1$$



$$C_2: r_2(t) = \langle \cos t, \sin t \rangle, 0 < t < \pi$$

(eller t.ex. $r_2(x) = \langle x, \sqrt{1-x^2} \rangle$)

2.1) Kritiska punkter längs randkurvor:

$$\underline{C_1}: g_1(t) = f(r_1(t)) = f(t, 0) = t^2$$

Krit. punkter: $g_1'(t) = 2t = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

Kandidat

$$g_1(0) = f(0, 0) = 0$$

$$\underline{C_2}: g_2(t) = f(\cos t, \sin t) = \underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{=1} - \sin t = 1 - \sin t.$$

$$g_2'(t) = -\cos t = 0 \Leftrightarrow t = \pi/2. \quad (0 < t < \pi)$$

Kandidat

$$g_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(0, 1) = 0$$

2.2) "Hörn"

Kandidater:

$$\begin{aligned} f(-1, 0) &= 1 \\ f(1, 0) &= 1 \end{aligned}$$

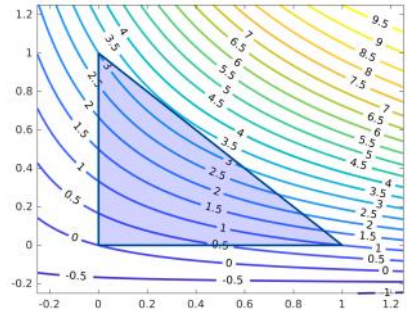
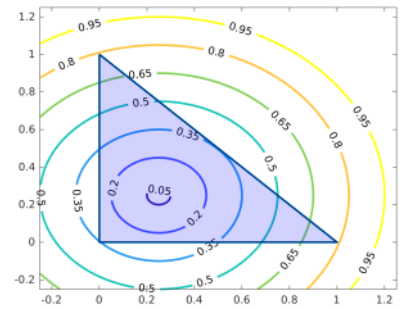
Globalt min $-\frac{1}{4}$ i $(0, \frac{1}{2})$, globalt max 1 i $(\pm 1, 0)$.

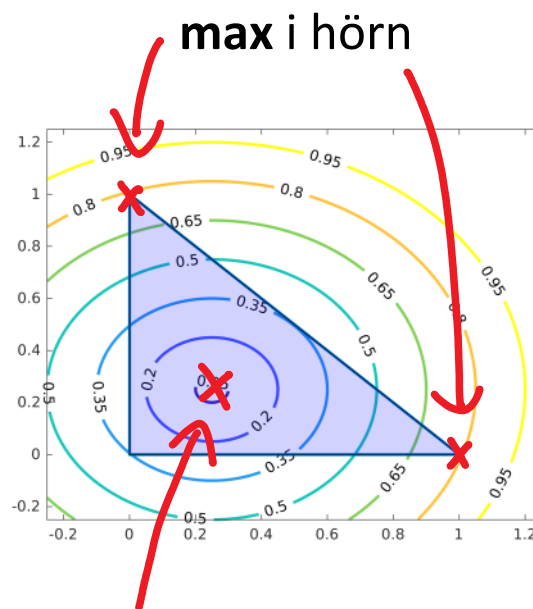
Classtime

Följande visar en höjdkartor för två funktioner $f(x, y)$. Om man vill hitta max och min inom den blåa triangeln, bland vilka punkter finns de?

(Samma fråga för båda funktionerna, olika svar)

- Hörnen på triangeln
- Kritiska punkter av f när f ses som en funktion av en variabel längs någon av de tre linjerna på randen av triangeln.
- Kritiska punkter av f inuti triangeln.





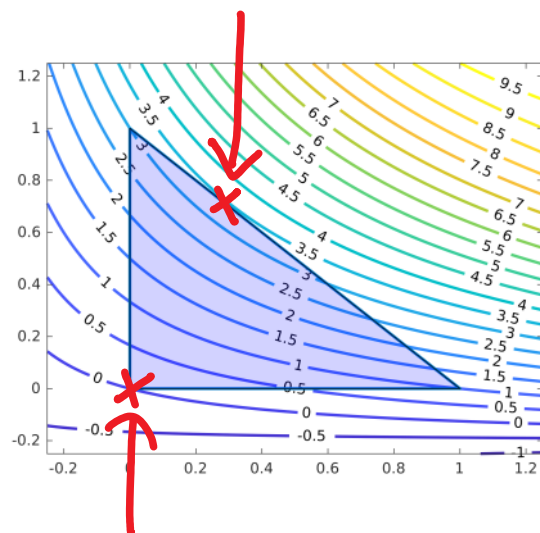
min i kritisk punkt

Klassens svar:

- ✓ Kritiska punkter av f när f ses som en funktion av en variabel längs någon av de tre linjerna på randen av triangeln. 49%
- ✓ Hörnen på triangeln 37%
- ✗ Kritiska punkter av f inuti triangeln. 14%

max i kritisk punkt längs randkurva

(Procenttalen är som andel av totala antalet svar. Ett flertal av er svarade bara med ett alternativ, och andelen av er som svarat båda alternativen rätt var 34% resp. 28%)



Klassens svar:

- ✓ Kritiska punkter av f inuti triangeln. 45%
- ✓ Hörnen på triangeln 38%
- ✗ Kritiska punkter av f när f ses som en funktion av en variabel längs någon av de tre linjerna på randen av triangeln. 17%

Optimering under bivillkor, Lagrangemultiplikatorer 14.8

Ska lösa problem som följande:

Beräkna max av $4x^2 + 4y$ när (x,y) ligger på enhetscirkeln
 $x^2 + y^2 = 1$.

En möjlighet: Parametrisera enh. cirkeln, t.ex. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t \rangle$, $0 \leq t < 2\pi$,
hitta max av $h(\mathbf{r}(t)) = 4\cos^2 t + 4\sin t$.

(Problem som studerar i envariabel, skulle gå bra här)

Annan möjlighet: Se som fall av följande:

Optimering under bivillkor $f(x,y), g(x,y)$ def. på D .

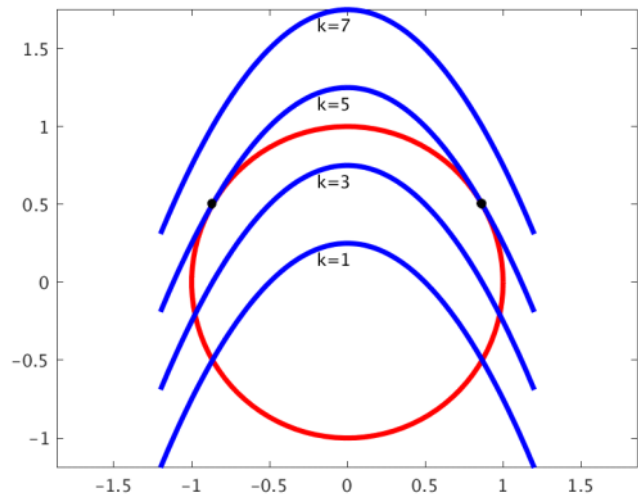
Vill hitta max och min av $f(x,y)$ på D under förutsättning att
 $g(x,y) = k$.

Villkoret $g(x,y) = k$ kallas ett bivillkor (constraint).

Max av $f(x, y)$ under bivillkoret $x^2 + y^2 = 1$ är det största värdet k på en nivåkurva $f(x, y) = k$ som skär $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$

Från bilden får man att största värdet på $f(x, y)$ är 5

(när $y = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$)

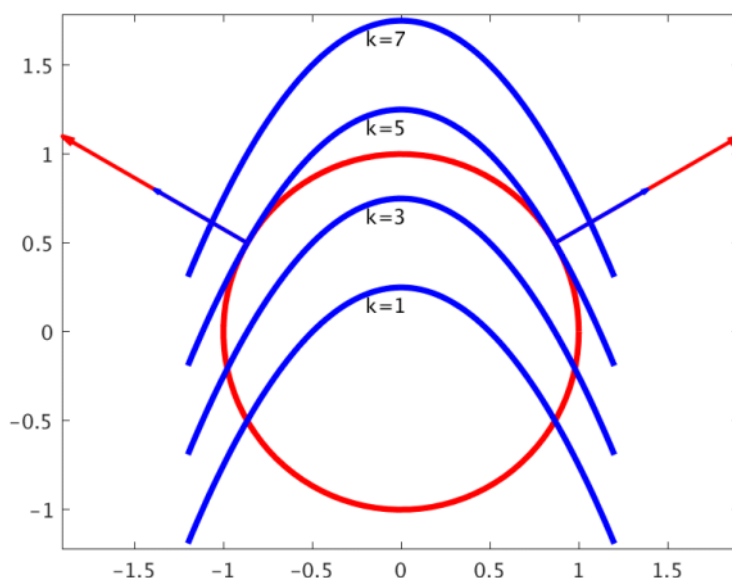


Ser ut som nivåkurvan

$f(x, y) = 5$ och kurvan

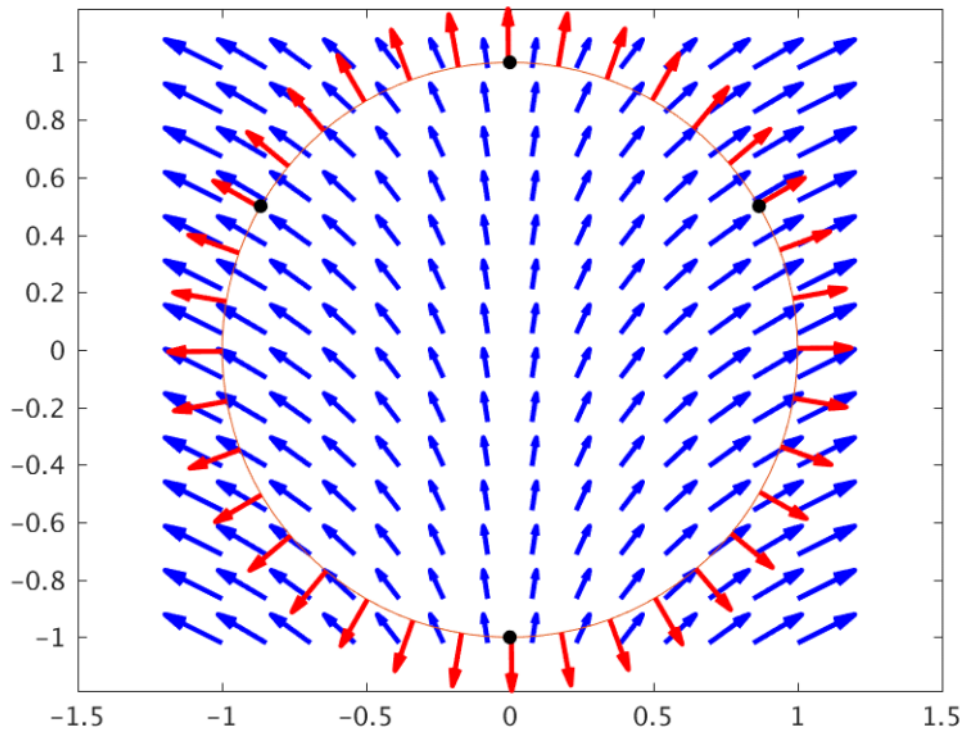
$g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$ som bestämmer bivillkoret har samma tangentlinje i maxpunkten

Tangentlinjerna är parallella om normallinjerna (som är vinkelräta mot tangentlinjerna) pekar i samma riktning. Riktningen av normallinjer bestäms av ∇f och ∇g .



(Gradienterna i grafen är omskalade)

Optimering med Lagrangemultiplikatorer: Leta efter max av $f(x, y)$ när $g(x, y) = k$ i punkter (x, y) där ∇f och ∇g är parallella.



Metoden med Lagrangemultiplikatorer

För att hitta max och min till $f(x,y)$ under bivillkoret $g(x,y)=k$: (under förutsättning att extremvärden finns, och att $\nabla g(x,y) \neq 0$ på $g(x,y)=k$)

a) Hitta alla lösn. (x,y) till

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = k \end{cases}$$

för något λ . (λ kallas Lagrangemultiplikator)

b) Jämför $f(x,y)$ för alla lösn. (x,y) från a).
Det största värdet ger max och det minsta värdet ger min.

Anm: Förutsättningen att extremvärden finns är uppfyllt om $\{g(x,y)=k\}$ är sluten och begränsad, t.ex. om det är en cirkel eller ellips. Kommer bara studera problem där extremvärden existerar.

Ex Hitta max och min till $f(x,y) = 4x^2 + 4y$ under bivillkoret $g(x,y) = x^2 + y^2 = 1$.

Enligt metoden, löser först:

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 8x = \lambda \cdot 2x & (\Rightarrow) & x=0 \text{ el. } \lambda=4 & (1) \\ 4 = \lambda \cdot 2y & & & (2) \\ x^2 + y^2 = 1 & & & (3) \end{cases}$$

Två fall från 1:

Fall 1: $x=0 \Rightarrow y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1 \Rightarrow \lambda = \frac{4}{2y} = \pm 2$.

Kontrollera att ger lösn. $(x,y,\lambda) = (0,1,2)$ och $(0,-1,-2)$
(inte viktigt vad λ är, men viktigt att finns något λ för givet x och y .)

Fall 2: $\lambda=4 \Rightarrow y = \frac{4}{2\lambda} = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Kontrollera att ger lösn. $(x,y,\lambda) = (\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 4)$.

För följande lösningar:

Max är 5 i $(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$
(såg i figur tidigare)

Min är -4 i $(0,-1)$

(x,y)	
$(0,1)$	4
$(0,-1)$	-4
$(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$	$4 \cdot \frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{1}{2} = 5$
$(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$	5