

Sammanfattning Föreläsning 7

- **Andraderivatatestet för lokala extremvärden**

$f(x, y)$ kontinuerliga partiella derivator ordning 2,

$$\text{låt } D = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2 = \begin{vmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{vmatrix}$$

Om $f_x(a, b) = 0 = f_y(a, b)$ (dvs (a, b) en kritisk punkt) och

- $D > 0$ och $f_{xx}(a, b) > 0$, då är (a, b) ett lokalt min
- $D > 0$ och $f_{xx}(a, b) < 0$, då är (a, b) ett lokalt max
- $D < 0$, då är (a, b) en sadelpunkt
- $D = 0$, då ger testet ingen information

Randpunkter till en mängd D är punkter (x, y) i $\mathbb{R}^2$ s.a. varje cirkelskiva kring (x, y) innehåller både punkter från D och punkter ej i D

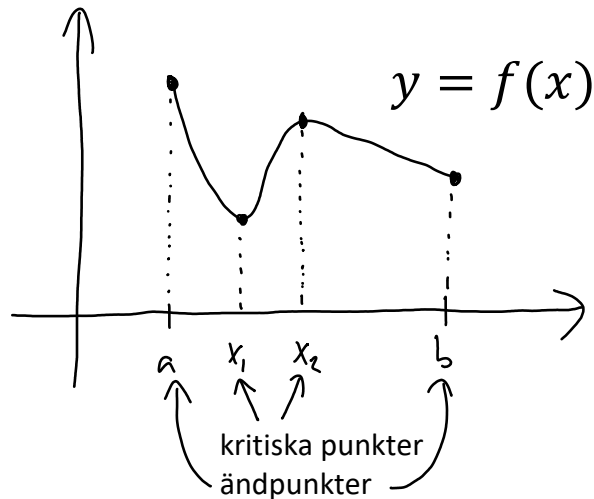
D är **sluten** om den innehåller alla sina randpunkter

D är **begränsad** om den är innehållen i någon cirkelskiva

Sats Om $f(x, y)$ är kontinuerlig på $D \subseteq \mathbb{R}^2$, där D är sluten och begränsad, då har f ett globalt max och min på D .

Påminnelse Om $f(x)$ deriverbar på ett slutet intervall $[a, b]$ så har f globalt max och min på $[a, b]$ och de kan bestämmas genom att jämföra funktionsvärden $f(x)$ i

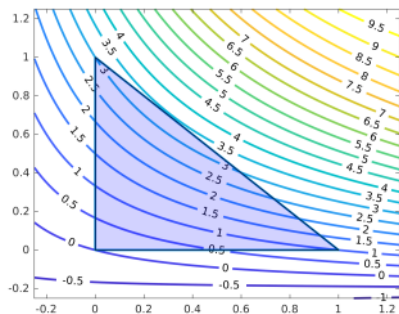
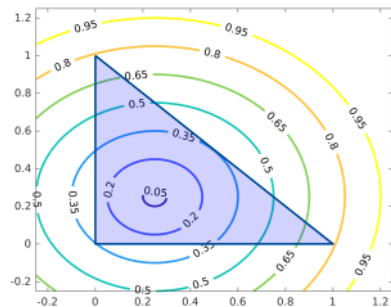
- ändpunkter a och b
- kritiska punkter $f'(x) = 0$

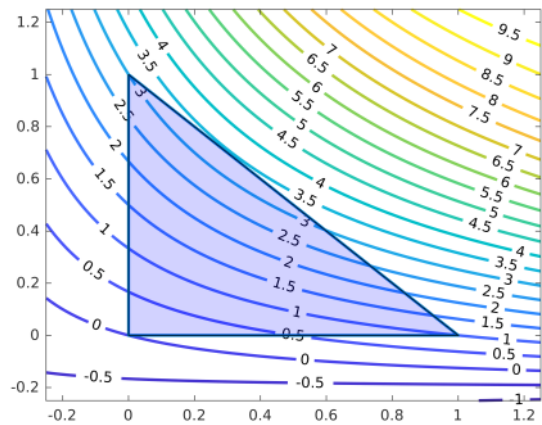
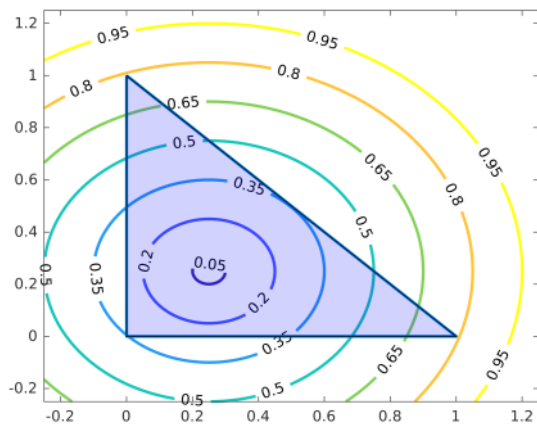


Följande visar en höjdkartor för två funktioner $f(x, y)$. Om man vill hitta max och min inom den blåa triangeln, bland vilka punkter finns de?

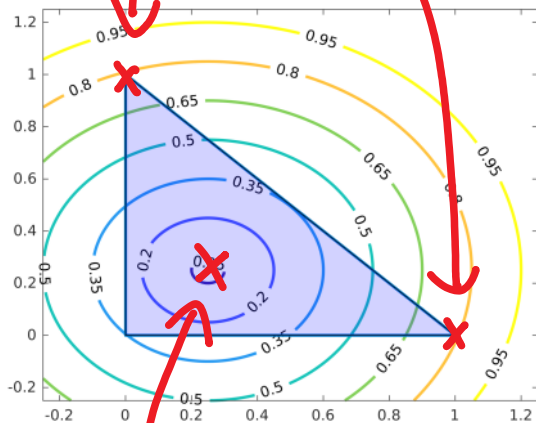
(Samma fråga för båda funktionerna, olika svar)

- Hörnen på triangeln
- Kritiska punkter av f när f ses som en funktion av en variabel längs någon av de tre linjerna på randen av triangeln.
- Kritiska punkter av f inuti triangeln.



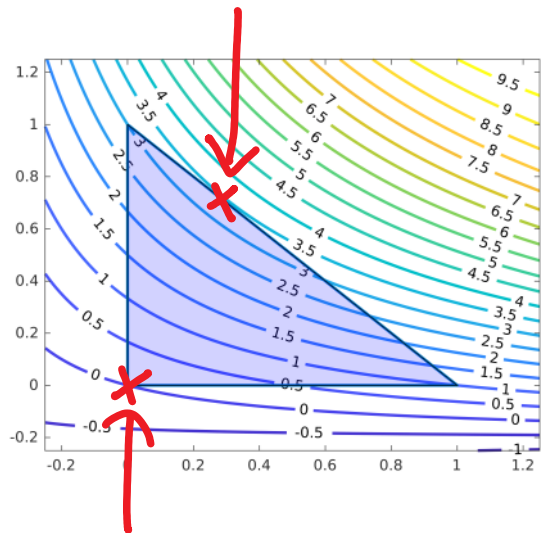


max i hörn



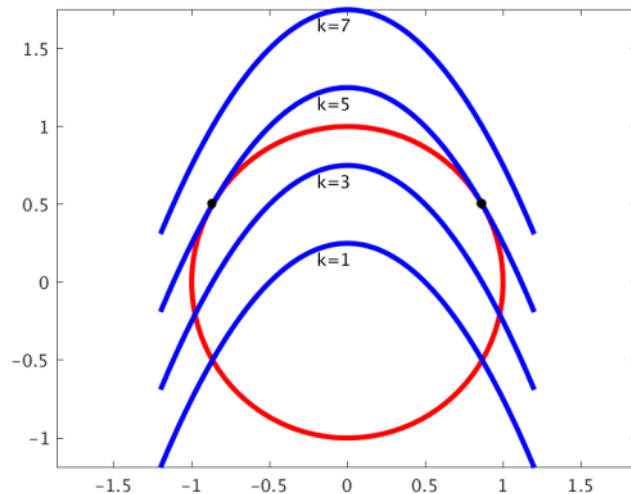
min i kritisk punkt

max i kritisk punkt längs randkurva

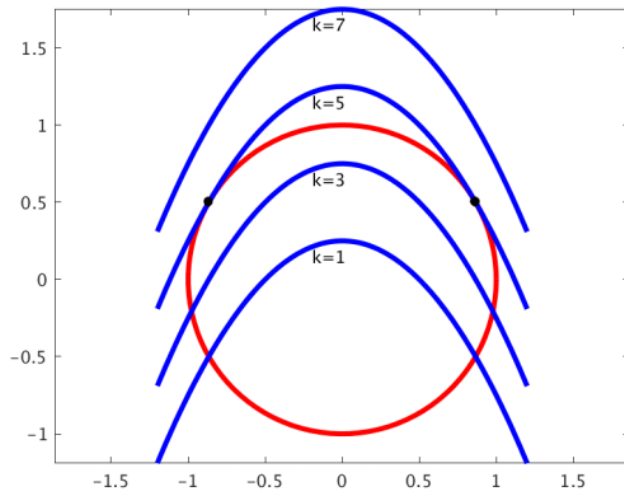


min i hörn

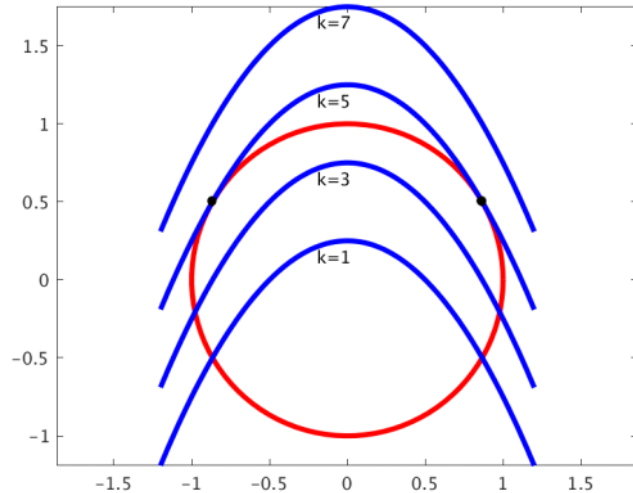
Max av $f(x, y)$ under bivillkoret $x^2 + y^2 = 1$ är det största värdet k på en nivåkurva $f(x, y) = k$ som skär $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$



Från bilden får man att största värdet på $f(x, y)$ är 5
(när $y = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$)

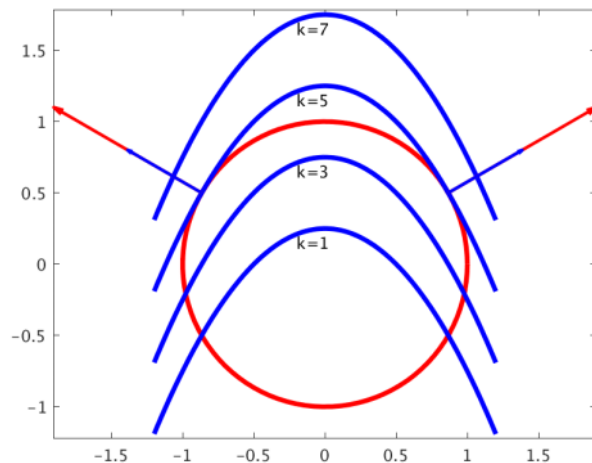


Ser ut som nivåkurvan $f(x, y) = 5$ och kurvan $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$ som bestämmer bivillkoret har samma tangentlinje i maxpunkten



Tangentlinjerna är parallella om normallinjerna (som är vinkelräta mot tangentlinjerna) pekar i samma riktning. Riktningen av normallinjer bestäms av ∇f och ∇g .

(Gradienterna i grafen är omskalade)



Optimering med Lagrangemultiplikatorer: Leta efter max av $f(x, y)$ när $g(x, y) = k$ i punkter (x, y) där ∇f och ∇g är parallella.

