

Sammanfattning Föreläsning 11

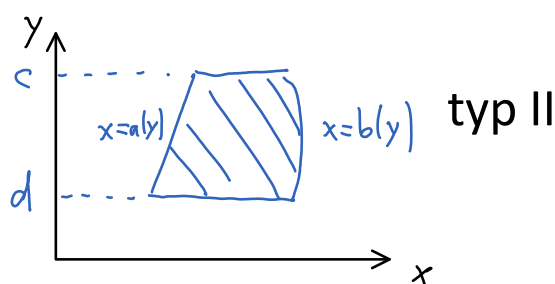
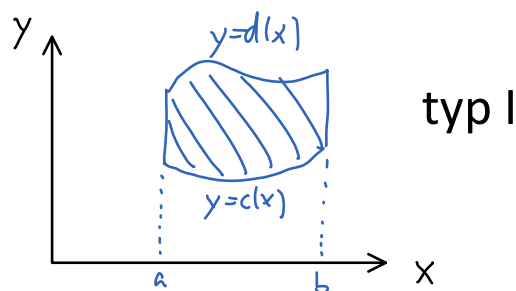
Område $D \subseteq \mathbb{R}^2$ av **typ I** om

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\},$$

$c(x), d(x)$ kontinuerliga, och av **typ II** om

$$D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, a(y) \leq x \leq b(y)\},$$

$a(y), b(y)$ kontinuerliga



Sats Om $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är av **typ I** eller **typ II** så är kontinuerliga funktioner på D integrerbara.

Om $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\}$ (typ I) är

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Om $D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, a(y) \leq x \leq b(y)\}$ (typ II) är

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

Obs

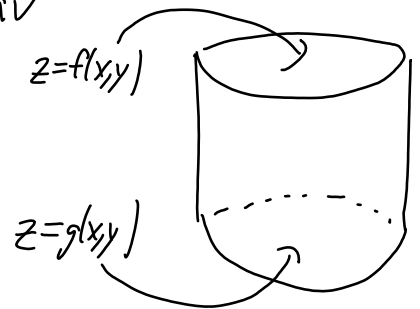
1. Dugga 2 öppen, stänger måndag 7/10, kl 18:00.
Går igenom det som behövs för sista uppgiften idag
2. Föreläsning på måndag 30/9, 15:15-17:00,
ingen föreläsning på fredag 11/10

Integraler över allmänna områden (forts.)

Egenskaper hos integraler (forts.)

e) Om $f(x,y) \geq g(x,y)$ så ges volymen av området mellan $z=g(x,y)$ och $z=f(x,y)$, $(x,y) \in D$ av

$$\iint_D f(x,y) - g(x,y) dA.$$



Dubbelintegraler och polära koordinater 15.3

Ex Beräkna volymen av området mellan konen $x^2+y^2=z^2$, $z \geq 0$ och planet $z=1$.

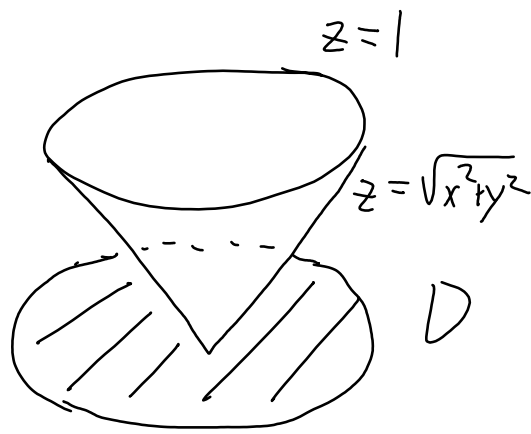
Ger en kon, för

$$x^2+y^2=z^2, \quad z \geq 0 \Leftrightarrow z = \sqrt{x^2+y^2} = r, \quad r \text{ avståndet från } (x,y) \text{ till origo.}$$

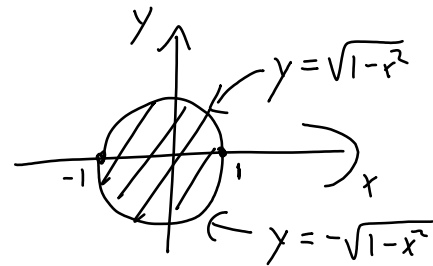
$z=r$ beror inte på vinkeln θ mellan (x,y) och pos. x -axeln, så kan rita $z=r$ när $\theta=0$, där $x=r$, och sedan rotera kring z -axeln.

Ytorna $z=\sqrt{x^2+y^2}$ och $z=1$ skär varandra då $\sqrt{x^2+y^2}=1$, dvs när $x^2+y^2=1$. Området mellan ytorna ges då av

$$\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1, \quad \text{där } (x,y) \in D = \{x^2+y^2 \leq 1\}.$$



D är ett typ I -område: $|x^2 + y^2| = 1 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{1 - x^2}$



$$D = \{ (x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \}$$

Områdets volym blir då

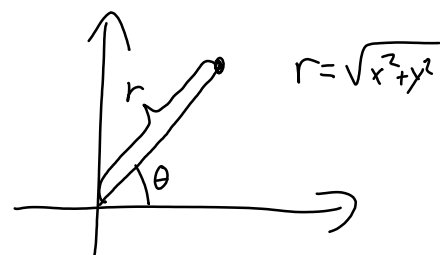
$$\iint_D 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \, dA = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \, dy \, dx.$$

Går, men krångligt att beräkna.

Idag: Enklare sätt.

En punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ kan beskrivas med polära koordinater (r, θ) genom

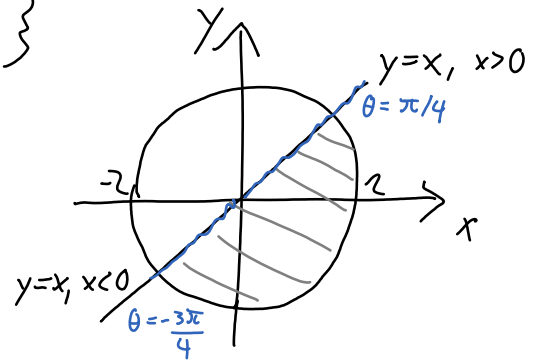
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$



Ex Området $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 4, y \leq x\}$

ges i polära koordinater av

$$\{(r,\theta) \mid 0 \leq r \leq 2, -\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$$

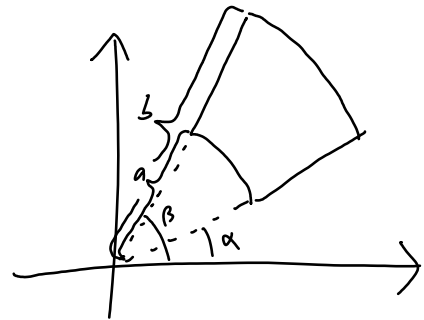


($y=x, x<0$ ges också av t.ex. $\theta = \frac{5\pi}{4}$, men hade istf
behövt ta $\theta = 2\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}$ för linjen $y=x, x>0$)

Def Ett område $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är en polär rektangel om det i
polära koordinater ges av

$$a \leq r \leq b, \quad \alpha \leq \theta \leq \beta$$

area
$$\frac{(b^2 - a^2)(\beta - \alpha)}{2}$$



(om $\alpha = 0, \beta = 2\pi, a = 0$, ger area πb^2)
(allmänna fallet följer av det)

Integration i polära koordinater

Sats Låt D vara en polär rektangel $a \leq r \leq b$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$
och antag att f är kont. på D .

$$\begin{aligned} \text{Då är} \quad \iint_D f(x,y) dA &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \\ &= \int_a^b \int_{\alpha}^{\beta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr \end{aligned}$$

Obs: Vänsterledet är integral över allmänt område (15.2)
Högerleden är upprepade integraler (15.1)

Man sammanfattar detta ofta:

$$\boxed{dA = r dr d\theta = r d\theta dr} \\ (\text{alt. } dx dy = r dr d\theta)$$

Så här i formelblad.

Påminnelse:

Definierade integral av $f(x, y)$ över rektangel $[a, b]$ genom att dela in i delrektanglar R_{ij} med area ΔR , ta punkter $(x_{ij}, y_{ij}) \in R_{ij}$ och ta gränsvärde av Riemannsummor:

$$\iint_D f(x, y) dA = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta R$$

Bevisidé (formel för integration i polära koordinater)

Efterlikna definition av integral över rektangel, dela in i "polära delrektanglar". Delar in

$[a, b]$ i m st lika stora delintervall $[r_{i-1}, r_i]$

av längd $\Delta r = r_i - r_{i-1}$

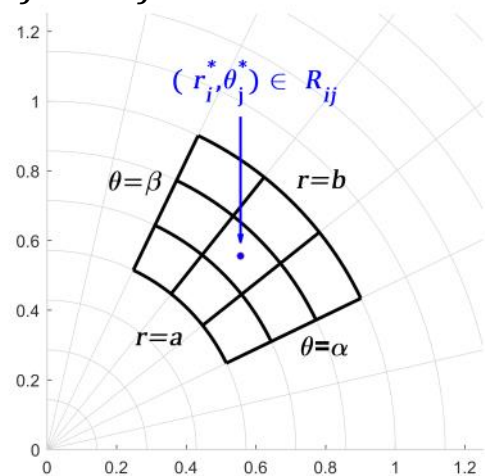
$[\alpha, \beta]$ i n st lika stora delintervall $[\theta_{j-1}, \theta_j]$

av längd $\Delta \theta = \theta_j - \theta_{j-1}$

Låt $r_i^* = \frac{r_{i-1} + r_i}{2}$ och $\theta_j^* = \frac{\theta_{j-1} + \theta_j}{2}$

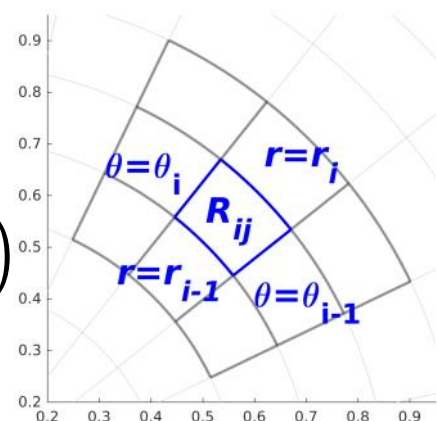
Låt R_{ij} vara den polära delrektangeln

$$r_{i-1} \leq r \leq r_i, \theta_{j-1} \leq \theta \leq \theta_j$$



Area av R_{ij}

$$\begin{aligned} \Delta R_{ij} &= \frac{(r_i^2 - r_{i-1}^2)(\theta_j - \theta_{j-1})}{2} \\ &= \frac{(r_i + r_{i-1})}{2} (r_i - r_{i-1})(\theta_j - \theta_{j-1}) \\ &= r_i^* \Delta r \Delta \theta \end{aligned}$$



$$\iint_D f(x, y) dA \stackrel{(1)}{=} \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*) \Delta R_{ij}$$

$$\stackrel{(2)}{=} \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*) r_i^* \Delta r \Delta \theta$$

$$\stackrel{(3)}{=} \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

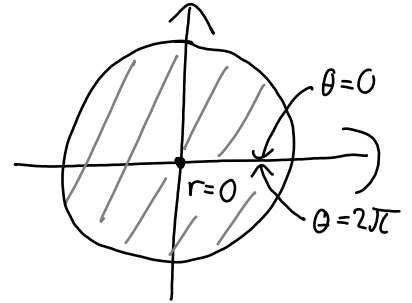
- 1) Integralen av f över D bör ges som gränsvärde av Riemannsummor över polära delrektanglar
- 2) $\Delta R_{ij} = r_i^* \Delta r \Delta \theta$
- 3) Den nedre upprepade integralen i r och θ ges som gränsvärde av Riemannsummor.

Ex Beräkna $\iint_D 1 - \sqrt{x^2 + y^2} dA$, där $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

(Från början av föreläsningen)

I polära koordinater ges området av:

$$\{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$



och $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2} = \sqrt{r^2 (\underbrace{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}_{=1})} = r \quad (r \geq 0)$

$$\begin{aligned} \text{Så} \quad \iint_D 1 - \sqrt{x^2 + y^2} dA &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \overbrace{(1-r)r}^{1-\sqrt{x^2+y^2}} d\theta dr = \int_0^1 [(r-r^2)\theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr = \\ &= 2\pi \int_0^1 r - r^2 dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \right]_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

glöm inte!

(Area av kon är basarean gånger höjd genom 3)

Classtime

Vilka av följande upprepade integraler är lika med $\iint_D \sin(x^2 + y^2) dA$, där $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9, y \leq 0\}$ som i följande figur? (Mer än ett svar kan vara rätt)

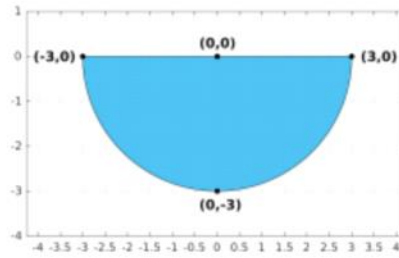
Correct answers

☐ $\int_0^3 \int_{-\pi}^0 \sin(r^2) r d\theta dr$

☐ $\int_{-3}^3 \int_{\pi}^{2\pi} \sin(r^2) r d\theta dr$

☐ $\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^0 \sin(x^2 + y^2) dy dx$

☐ $\int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^0 \sin(x^2 + y^2) dy dx$



D kan ses som ett typ I-område:

$$D = \{(x, y) \mid -3 \leq x \leq 3, -\sqrt{9 - x^2} \leq y \leq 0\}$$

Ger integralen

$$\int_{-3}^3 \int_{\sqrt{9-x^2}}^0 f(x, y) dy dx$$

$$\int_0^3 \int_{\sqrt{9-x^2}}^0 f(x, y) dy dx$$

Ger bara integralen på högra halvan

D kan beskrivas med polära koordinater:

$$\{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 3, \pi \leq \theta \leq 2\pi \text{ (el. } -\pi \leq \theta \leq 0)\}$$

Ger integralen

$$\int_0^3 \int_{\pi}^{2\pi} \sin(r^2) r d\theta dr$$

$$\int_{-3}^3 \int_{-\pi}^0 \sin(r^2) r d\theta dr$$

Tar med negativa r som den inte borde.

Klassens svar

✓ $\int_0^3 \int_{-\pi}^0 \sin(r^2) r d\theta dr$ 32%

✓ $\int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^0 \sin(x^2 + y^2) dy dx$ 32%

✗ $\int_{-3}^3 \int_{\pi}^{2\pi} \sin(r^2) r d\theta dr$ 24%

✗ $\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^0 \sin(x^2 + y^2) dy dx$ 13%