

Sammanfattning Föreläsning 11

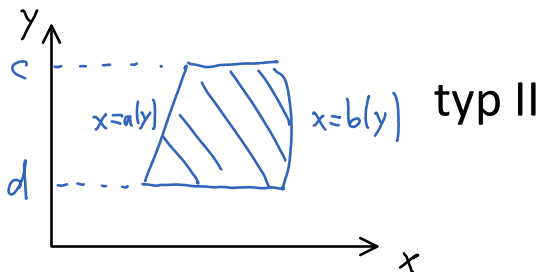
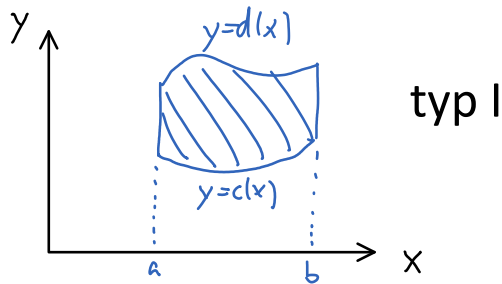
Område $D \subseteq \mathbb{R}^2$ av **typ I** om

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\},$$

$c(x), d(x)$ kontinuerliga, och av **typ II** om

$$D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, a(y) \leq x \leq b(y)\},$$

$a(y), b(y)$ kontinuerliga



Sats Om $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är av **typ I** eller **typ II** så är kontinuerliga funktioner på D integrerbara.

Om $D = \{ (x, y) \mid a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x) \}$ (typ I) är

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Om $D = \{ (x, y) \mid c \leq y \leq d, a(y) \leq x \leq b(y) \}$ (typ II) är

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

Obs

- 1) Dugga 2 öppen, stänger måndag 7/10, kl 18:00.
Går igenom det som behövs för sista uppgiften idag
- 2) Föreläsning på måndag 30/9, 15:15-17:00,
ingen föreläsning på fredag 11/10

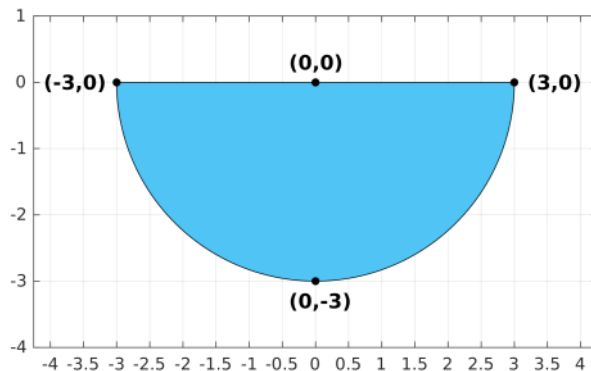
Vilka av följande upprepade integraler är lika med $\iint_D \sin(x^2 + y^2) dA$, där $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9, y \leq 0\}$ som i följande figur? (Mer än ett svar kan vara rätt)

☐ $\int_0^3 \int_{-\pi}^0 \sin(r^2) r d\theta dr$

☐ $\int_{-3}^3 \int_{\pi}^{2\pi} \sin(r^2) r d\theta dr$

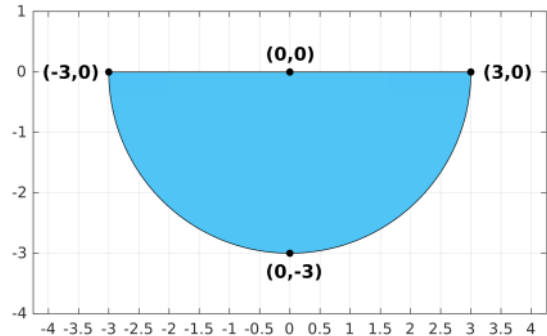
☐ $\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^0 \sin(x^2 + y^2) dy dx$

☐ $\int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^0 \sin(x^2 + y^2) dy dx$



D kan ses som ett typ I-område:

$$D = \{(x, y) \mid ? \leq x \leq ?, ? \leq y \leq ? \}$$

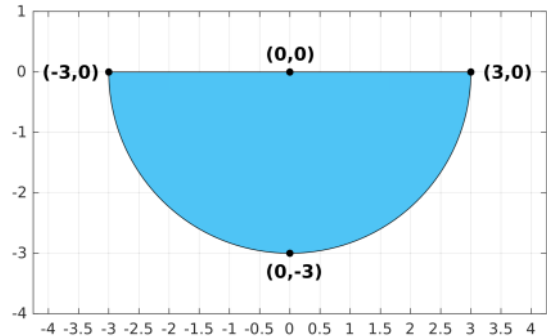


D kan ses som ett typ I-område:

$$D = \{(x, y) \mid -3 \leq x \leq 3, -\sqrt{9 - x^2} \leq y \leq 0\}$$

Ger integralen

?

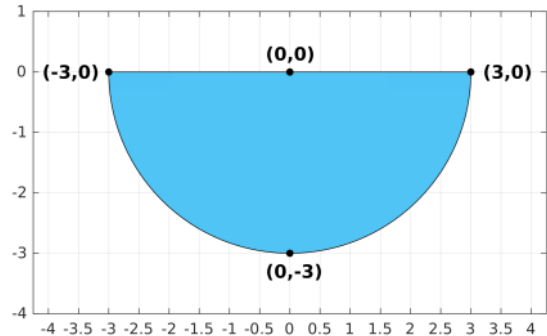


D kan ses som ett typ I-område:

$$D = \{(x, y) \mid -3 \leq x \leq 3, -\sqrt{9 - x^2} \leq y \leq 0\}$$

Ger integralen

$$\int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^0 f(x, y) dy dx$$



D kan ses som ett typ I-område:

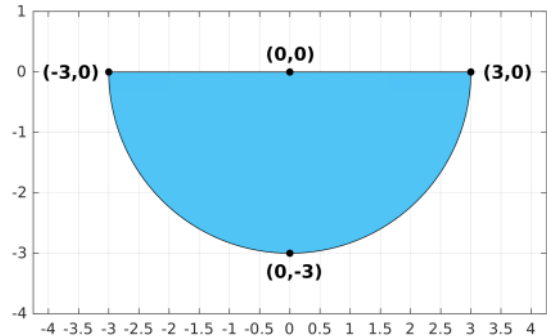
$$D = \{(x, y) \mid -3 \leq x \leq 3, -\sqrt{9 - x^2} \leq y \leq 0\}$$

Ger integralen

$$\int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^0 f(x, y) dy dx$$

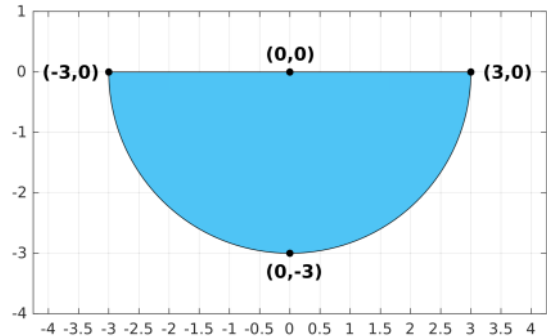
$$\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^0 f(x, y) dy dx$$

Ger bara integralen på högra halvan



D kan beskrivas med polära koordinater:

$$\{ (r, \theta) \mid ? \leq r \leq ?, ? \leq \theta \leq ? \}$$

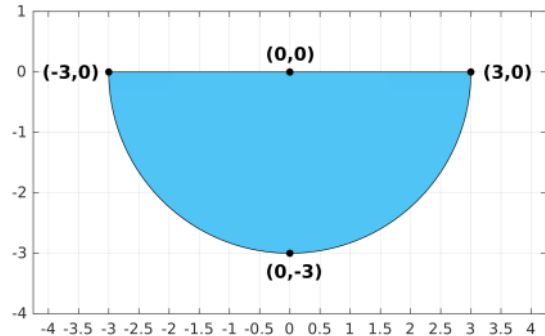


D kan beskrivas med polära koordinater:

$$\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 3, \pi \leq \theta \leq 2\pi \text{ (el. } -\pi \leq \theta \leq 0) \}$$

Ger integralen

?

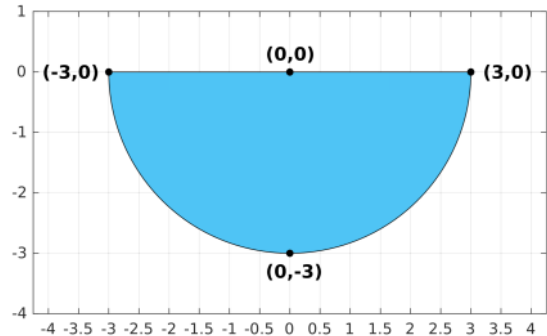


D kan beskrivas med polära koordinater:

$$\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 3, \pi \leq \theta \leq 2\pi \text{ (el. } -\pi \leq \theta \leq 0) \}$$

Ger integralen

$$\int_0^3 \int_{\pi}^{2\pi} \sin(r^2) r \, d\theta \, dr$$



D kan beskrivas med polära koordinater:

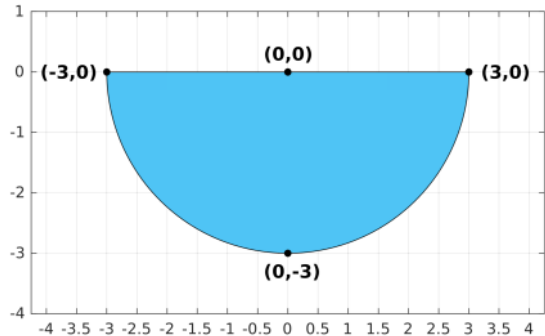
$$\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 3, \pi \leq \theta \leq 2\pi \text{ (el. } -\pi \leq \theta \leq 0) \}$$

Ger integralen

$$\int_0^3 \int_{\pi}^{2\pi} \sin(r^2) r \, d\theta \, dr$$

$$\int_{-3}^3 \int_{-\pi}^0 \sin(r^2) r \, d\theta \, dr$$

Tar med negativa r som den inte borde.



Påminnelse:

Definierade integral av $f(x, y)$ över rektangel $[a, b] \times [c, d]$ genom att dela in i delrektanglar R_{ij} med area ΔR ,

ta punkter $(x_{ij}, y_{ij}) \in R_{ij}$ och ta gränsvärde av

Riemannsummor:

$$\iint_D f(x, y) dA = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta R$$

Bevisidé: Formel för integration över polär rektangel:

$$r \in [a, b], \theta \in [\alpha, \beta]$$

Efterlikna definition av integral över rektangel, dela in i

"polära delrektanglar". Delar in

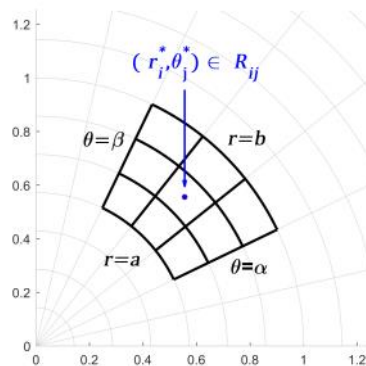
$[a, b]$ i m st lika stora delintervall $[r_{i-1}, r_i]$ av längd $\Delta r = r_i - r_{i-1}$

$[\alpha, \beta]$ i n st lika stora delintervall $[\theta_{j-1}, \theta_j]$ av längd $\Delta \theta = \theta_j - \theta_{j-1}$

$$\text{Låt } r_i^* = \frac{r_{i-1} + r_i}{2} \text{ och } \theta_j^* = \frac{\theta_{j-1} + \theta_j}{2}$$

Låt R_{ij} vara den polära delrektangeln

$$r_{i-1} \leq r \leq r_i, \theta_{j-1} \leq \theta \leq \theta_j$$

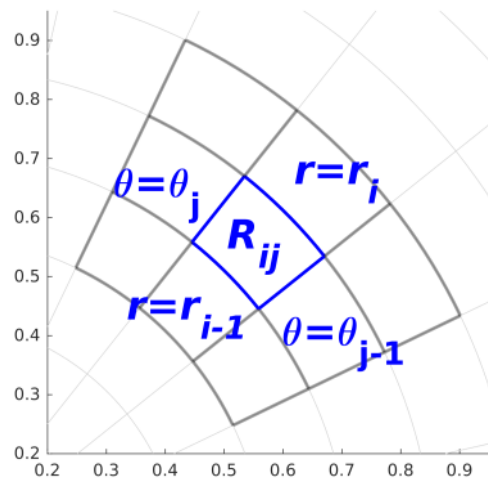


$$\Delta r = r_i - r_{i-1}, \Delta \theta = \theta_j - \theta_{j-1}, r_i^* = \frac{r_{i-1} + r_i}{2} \text{ och } \theta_j^* = \frac{\theta_{j-1} + \theta_j}{2}$$

$$R_{ij}: r_{i-1} \leq r \leq r_i, \theta_{j-1} \leq \theta \leq \theta_j$$

Area av R_{ij}

$$\begin{aligned} \Delta R_{ij} &= \frac{(r_i^2 - r_{i-1}^2)(\theta_j - \theta_{j-1})}{2} \\ &= \frac{(r_i + r_{i-1})}{2} (r_i - r_{i-1})(\theta_j - \theta_{j-1}) \\ &= r_i^* \Delta r \Delta \theta \end{aligned}$$



$$\iint_D f(x, y) \, dA \stackrel{(1)}{=} \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*) \Delta R_{ij}$$

- 1) Integralen av f över D bör ges som gränsvärde av Riemannsummor över polära delrektanglar

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x, y) dA &\stackrel{(1)}{=} \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f\left(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*\right) \Delta R_{ij} \\
&\stackrel{(2)}{=} \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f\left(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*\right) r_i^* \Delta r \Delta \theta
\end{aligned}$$

- 1) Integralen av f över D bör ges som gränsvärde av Riemannsummor över polära delrektanglar
- 2) $\Delta R_{ij} = r_i^* \Delta r \Delta \theta$

$$\iint_D f(x, y) dA \stackrel{(1)}{=} \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*) \Delta R_{ij}$$

$$\stackrel{(2)}{=} \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*) r_i^* \Delta r \Delta \theta$$

$$\stackrel{(3)}{=} \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

- 1) Integralen av f över D bör ges som gränsvärde av Riemannsummor över polära delrektanglar
- 2) $\Delta R_{ij} = r_i^* \Delta r \Delta \theta$
- 3) Den nedre upprepade integralen i r och θ ges som gränsvärde av Riemannsummor.