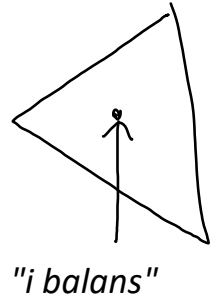


Sammanfattning Föreläsning 13

- D tunn skiva i planet, densitet $\rho(x, y)$.
 - Massa $m = \iint_D \rho(x, y) dA$.
 - Masscentrum $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m} \right)$ där
 - $M_x = \iint_D x \rho(x, y) dA$ och $M_y = \iint_D y \rho(x, y) dA$



- Area av grafen $z = f(x, y), (x, y) \in D$:

$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dA$$

Trippelintegraler 15.6

$E \subseteq \mathbb{R}^3$ område $g(x,y,z)$ def. på E

Definierar trippelintegralen av g över E

$$\iiint_E g(x,y,z) dV$$

på analogt sätt som dubbelintegraler
först när $E = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$ ett rätblock (låda) m.h.a.
Riemannsummar, sedan för allmänna begränsade områden genom
att reducera till fallet med rätblock.

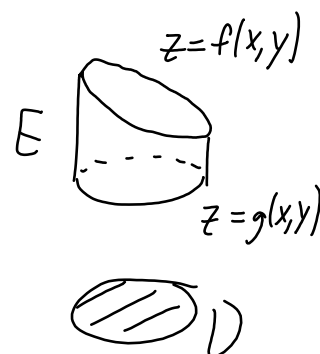
(Genom att def. en funktion på ett rätblock som är lika med
den givna funktionen på E och 0 utanför.)

Upprepad integration i trippelintegraler

Kommer idag anta alla funktioner är kontinuerliga, s.a. alla
integraler existerar.

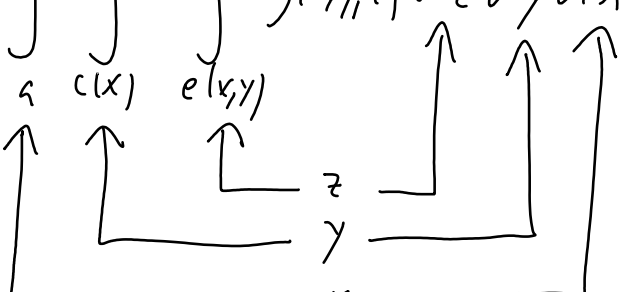
Om $E = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D, e(x,y) \leq z \leq f(x,y)\}$ $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är

$$\iiint_E g(x,y,z) dV = \iint_D \int_{e(x,y)}^{f(x,y)} g(x,y,z) dz dA$$



Om t.ex. $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\}$ (typ I-område) s.a.

$E = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x), e(x, y) \leq z \leq f(x, y)\}$ blir då

$$\iiint_E g(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \int_{e(x, y)}^{f(x, y)} g(x, y, z) dz dy dx$$


För motsvarande om byter roller på variablerna, t.ex.

om $E = \{(x, y, z) \mid e \leq z \leq f, a(z) \leq x \leq b(z), c(x, z) \leq y \leq d(x, z)\}$ blir

$$\iiint_E g(x, y, z) dV = \int_e^f \int_{a(z)}^{b(z)} \int_{c(x, z)}^{d(x, z)} g(x, y, z) dy dx dz$$

Ex Beräkna $\iiint_E z dV$ där E är tetradern som begränsas av planen $x=0$, $y=0$, $z=0$ och $2x+y+z=2$.

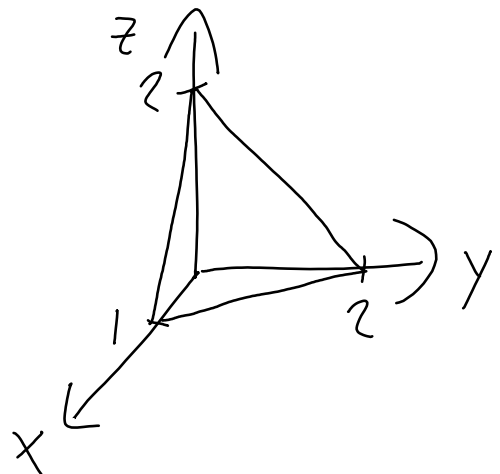
Området mellan ett antal ytor som bestäms av några likheter beskrivs typiskt av motsvarande olikheter (dvs. byt $=$ mot $\geq$ el. $\leq$). Vilket håll? Rita figur.

$2x+y+z=2$ är ett plan. Kollar först var skär x -, y - och z -axeln för att rita. (Ett plan bestäms av tre punkter)

Skär x -axeln när $y=z=0 \Rightarrow 2x=2$, dvs. i $(1,0,0)$

Skär y -axeln i $(0,2,0)$

Skär z -axeln i $(0,0,2)$



E blir då:

$$E = \{ (x,y,z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 2x+y+z \leq 2 \}$$

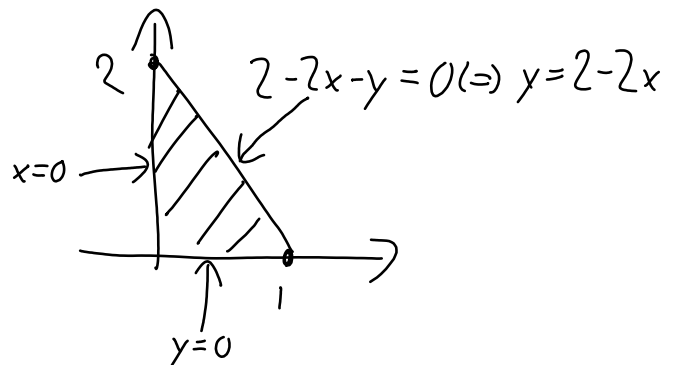
(Varför ≤ 2 i sista? Området är när under $z=2-2x-y$, alltså.)
(kolla någon punkt på rätt sida, t.ex. $(0,0,0)$: $2 \cdot 0 + 0 + 0 = 0 \leq 2$)

Kan kombinera de två sista: $0 \leq z \leq 2-2x-y$.

(Inte på formen att kan integrera som upprepad integral än.)
Måste fortsätta skriva om.

För att det ska finnas sådana (x, y, z) måste

$$x \geq 0, y \geq 0, 2 - 2x - y \geq 0:$$



$$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 - 2x, 0 \leq z \leq 2 - 2x - y\}$$

$$\iiint_E z \, dV = \int_0^1 \int_0^{2-2x} \int_0^{2-2x-y} z \, dz \, dy \, dx =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2-2x} \int_0^{2-2x-y} z \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{2-2x} \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{2-2x-y} dy \, dx =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2-2x} \frac{(2-2x-y)^2}{2} dy \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{(2-2x-y)^3}{3 \cdot (-1)} \right]_0^{2-2x} dx =$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^1 (2-2x)^3 dx = \frac{1}{6} \left[\frac{(2-2x)^4}{4 \cdot (-2)} \right]_0^1 = \frac{2^4}{6 \cdot 4 \cdot 2} = \frac{1}{3}$$

Classtime

Vilka av följande integraler är vettiga? (Dvs ger upprepade integraler som har en vettig mening matematiskt)

Correct answers

☐ $\int_0^2 \int_x^2 \int_x^y f(x, y, z) dz dy dx$

☐ $\int_0^2 \int_y^2 \int_x^y f(x, y, z) dz dy dx$

☐ $\int_0^2 \int_z^2 \int_z^2 f(x, y, z) dz dy dx$

☐ $\int_0^2 \int_z^2 \int_z^2 f(x, y, z) dx dy dz$

Klassens svar

✓ $\int_0^2 \int_x^2 \int_x^y f(x, y, z) dz dy dx$ 42%

✓ $\int_0^2 \int_z^2 \int_z^2 f(x, y, z) dx dy dz$ 31%

✗ $\int_0^2 \int_y^2 \int_x^y f(x, y, z) dz dy dx$ 20%

✗ $\int_0^2 \int_z^2 \int_z^2 f(x, y, z) dz dy dx$ 7%

$$\int_0^2 \int_y^2 \int_x^y f(x, y, z) dz dy dx$$

Har inte rimlig mening eftersom integrerar med avseende på y i mitten, kan då inte ha gränser i mitten som beror på y .

$$\int_0^2 \int_z^2 \int_z^2 f(x, y, z) dz dy dx$$

Har inte rimlig mening eftersom integrerar med avseende på z innerst, kan då inte ha några gränser som beror på z .

$$\int_0^2 \int_x^2 \int_x^y f(x, y, z) dz dy dx = \iiint_E f(x, y, z) dV$$
$$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 2, 2 \leq y \leq x, y \leq z \leq x\}$$

$$\int_0^2 \int_z^2 \int_z^2 f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_E f(x, y, z) dV$$
$$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 2, z \leq y \leq 2, z \leq x \leq 2\}$$

Cylindriska koordinater och trippelintegraler 15.7

Cylindriska koordinater (r, θ, z) på $\mathbb{R}^3$ får man genom att byta koordinaterna (x, y) mot polära koordinater (r, θ)

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

Om $E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, e(x, y) \leq z \leq f(x, y)\}$ där $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är en polär rektangel: $a \leq r \leq b$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$ följer från formelerna för upprepad integration i trippelintegraler och för integration i polära koordinater för dubbelintegraler att

$$\iiint_E g(x, y, z) dV = \int_a^b \int_\alpha^\beta \int_{e(r \cos \theta, r \sin \theta)}^{f(r \cos \theta, r \sin \theta)} g(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dz d\theta dr$$

Ex Beräkna $\iiint_E z dV$, där E är området mellan

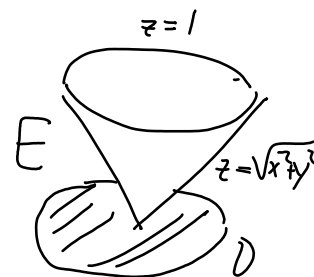
konen $x^2 + y^2 = z^2$, $z \geq 0$ och planet $z = 1$.

Såg förra veckan att om $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ är

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}.$$

D ges i polära koord. av

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$



och $\sqrt{x^2+y^2}=r$, så E blir i cylindriska koord.

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad r \leq z \leq 1.$$

$$D_a \text{ blir } \iiint_E z \, dV = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 z r \, dz \, d\theta \, dr =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=r}^{z=1} d\theta \, dr = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r - r^3 d\theta \, dr =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\pi \int_0^1 r - r^3 \, dr = \pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{4}.$$