Sammanfattning Föreläsning 14

Trippelintegraler $\iiint_E f(x,y,z)dV$

Beräknas typiskt som upprepade integraler.

Om t.ex. $E = \left\{ \begin{matrix} (x,y,z) \mid a \le x \le b, c(x) \le y \le d(x), \\ e(x,y) \le z \le f(x,y) \end{matrix} \right\}$ är

$$\iiint_E g(x,y,z)dV = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \int_{e(x,y)}^{f(x,y)} g(x,y,z)\, dz\, dy\, dx\,.$$

Cylindriska koordinater

Byter koordinaterna (x, y) mot polära koordinater (r, θ):

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

Om $E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, e(x, y) \leq z \leq f(x, y)\}$ och $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ges i polära koordinater av $a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta$ är

$$\iiint_E g(x, y, z)dV = \int_a^b \int_\alpha^\beta \int_{e(r\cos\theta, r\sin\theta)}^{f(r\cos\theta, r\sin\theta)} g(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\, dz\, d\theta dr$$

Ett område $E \subseteq \mathbb{R}^3$ har

volym $\iiint_E 1 \, dV$

Om E representerar en kropp med densitet $\rho(x, y, z)$

massa $m = \iiint_E \rho(x, y, z) \, dV$

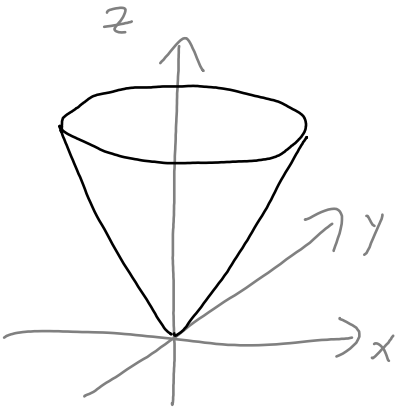
masscentrum $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}, \frac{M_z}{m}\right)$

$M_x = \iiint_E x \, \rho(x, y, z) \, dV$ osv.

Om E området mellan konen $x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0$ och planet $z = 1$, med densitet $\rho(x, y, z) = 1$ har vi sett att

$$m = \iiint_E 1 \, dV = \pi/3 \text{ (i fredags)}$$

$$M_z = \iiint_E z \, dV = \pi/4 \text{ (i tisdags)}$$



Om E området mellan konen $x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0$ och planet $z = 1$, med densitet $\rho(x, y, z) = 1$ har vi sett att

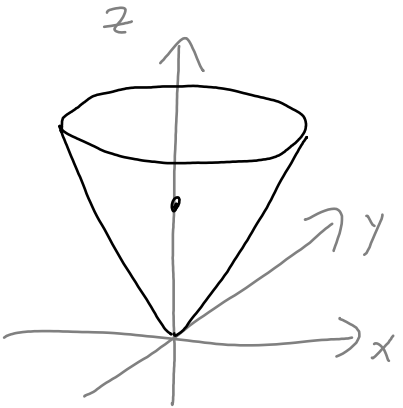
$$m = \iiint_E 1\, dV = \pi/3 \text{ (i fredags)}$$

$$M_z = \iiint_E z\, dV = \pi/4 \text{ (i tisdags)}$$

Av symmetriskäl är $\bar{x} = 0 = \bar{y}$, så

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(0,0,\frac{\pi/4}{\pi/3}\right) = \left(0,0,{}^3/_4\right)$$

(Rimligt att $\bar{z}$ ligger mellan $\frac{1}{2}$ och 1)

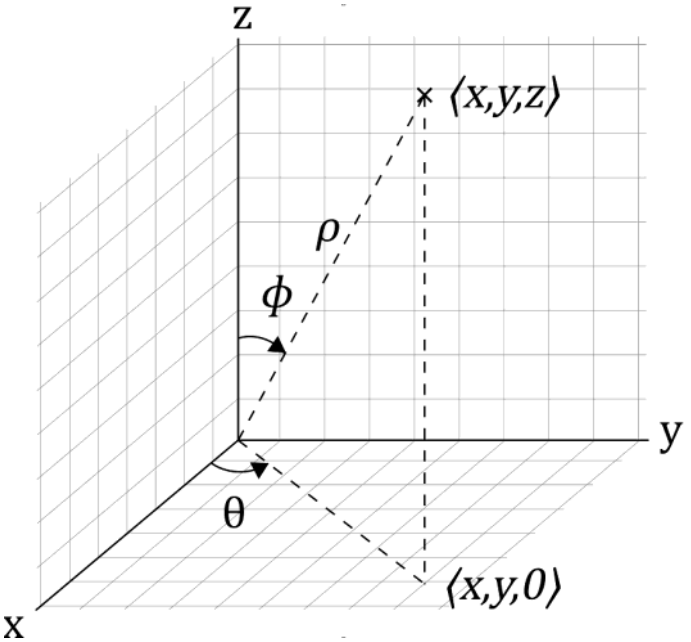


Sfäriska koordinater

ρ = avståndet till origo
($\rho \geq 0$)

θ = vinkeln mellan $\langle x, y, 0 \rangle$
och positiva x-axeln
(oftast $0 \leq \theta \leq 2\pi$ eller $-\pi \leq \theta \leq \pi$)

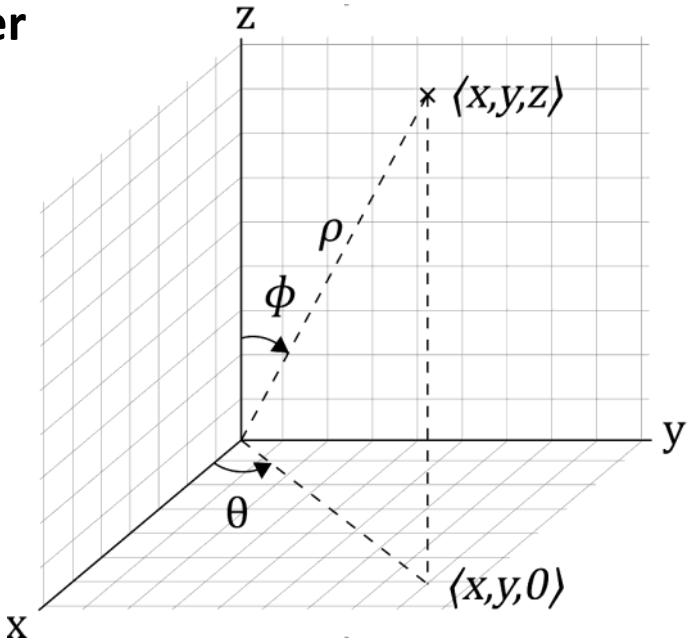
ϕ = vinkeln mellan $\langle x, y, z \rangle$
och positiva z-axeln
($0 \leq \phi \leq \pi$)



Anpassad från "3D Spherical 2.svg"
© Dmcq [CC BY-SA 3.0] / Wikipedia Commons

Formel för sfäriska koordinater

$$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases}$$

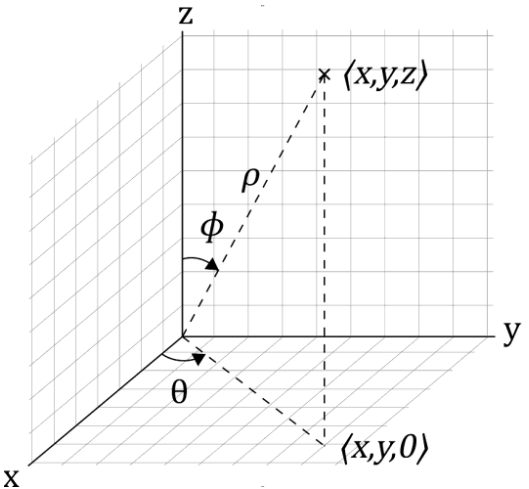


Anpassad från "3D Spherical 2.svg"
© Dmcq [CC BY-SA 3.0] / Wikipedia Commons

Vilka av följande beskriver ett halvklot i sfäriska koordinater? *(Mer än ett svar kan vara rätt)*

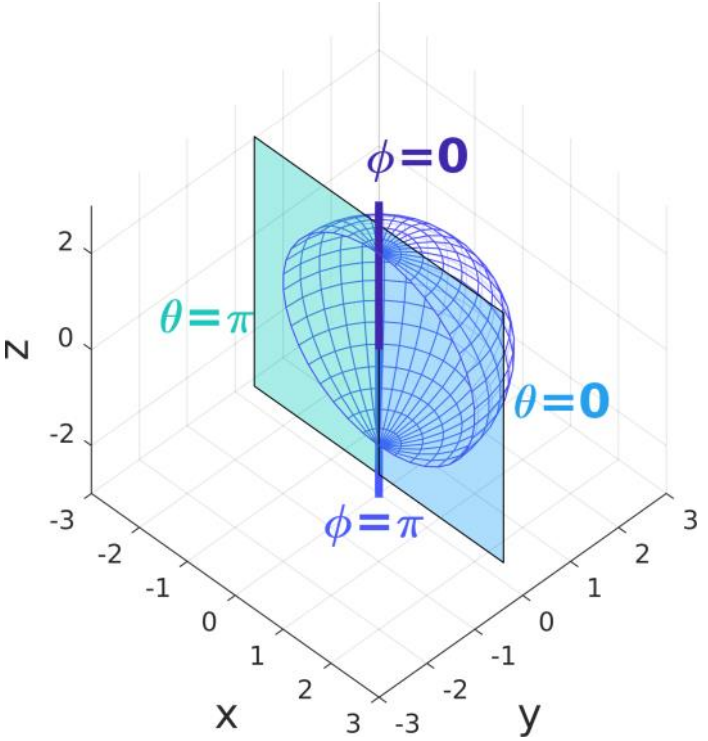
Correct answers

- [ ] $0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq \pi$
- [ ] $0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \phi \leq \pi/2, 0 \leq \theta \leq 2\pi$
- [ ] $1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq \pi$
- [ ] $0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

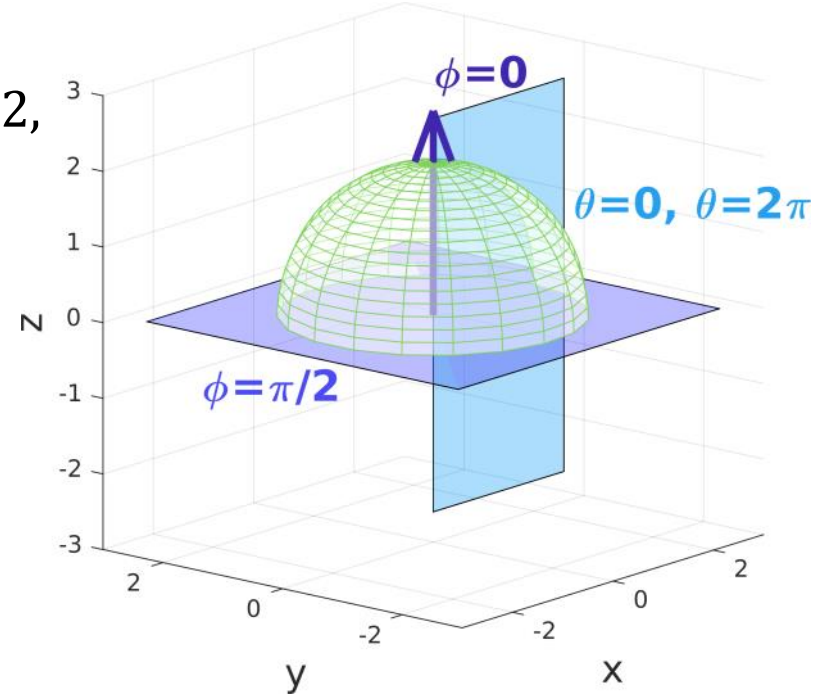


Anpassad från "3D Spherical 2.svg"
© Dmcq [CC BY-SA 3.0] / Wikipedia Commons

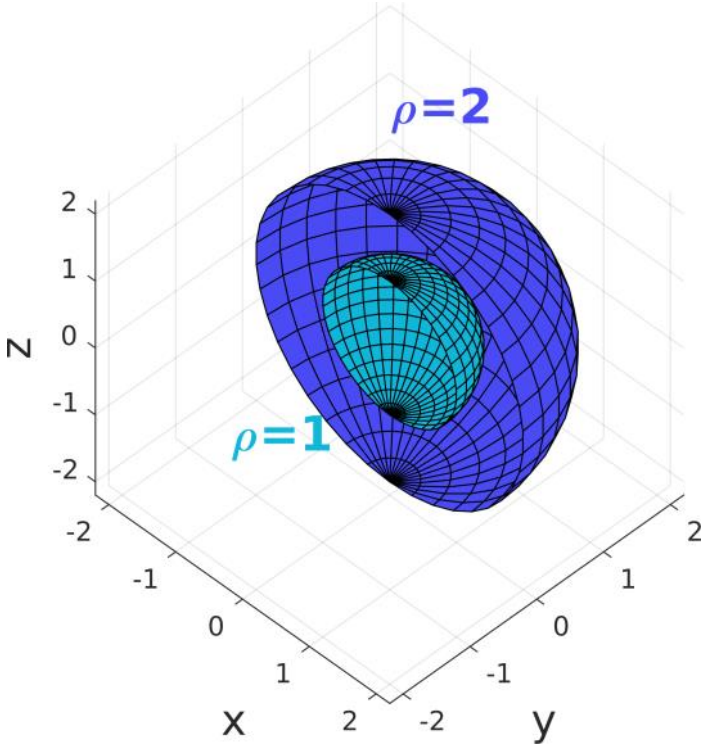
$$0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \phi \leq \pi,$$
$$0 \leq \theta \leq \pi$$



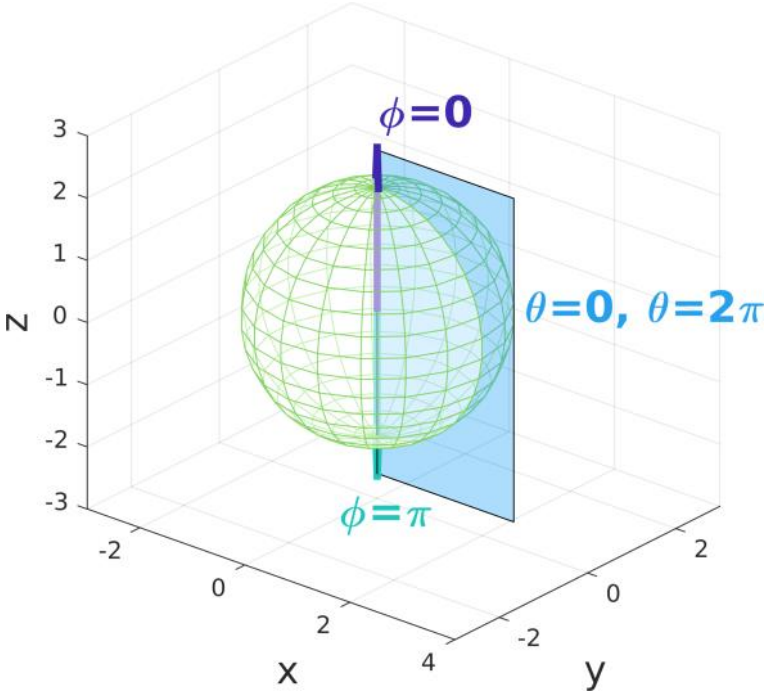
$$0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \phi \leq \pi/2,$$
$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$



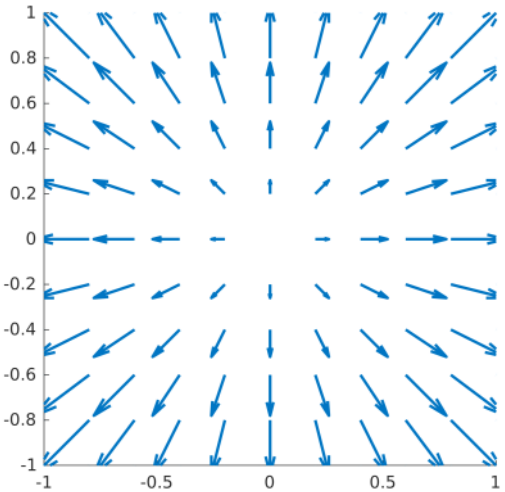
$$1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \phi \leq \pi,$$
$$0 \leq \theta \leq \pi$$



$$0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \phi \leq \pi,$$
$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$



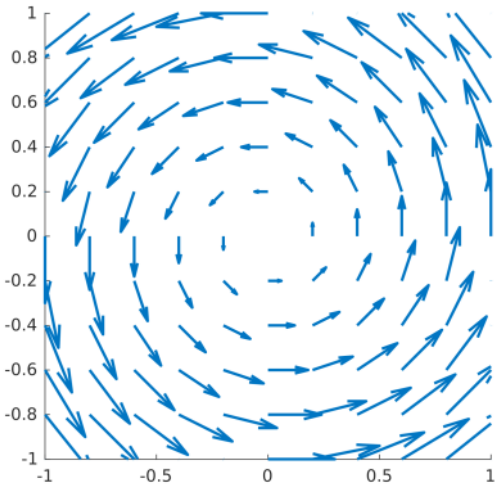
Ett vektorfält kan visualiseras genom att rita upp det i ett antal punkter.



Vektorfältet

$\mathbf{F}(x, y) = \langle x, y \rangle$

(omskalat för att kunna se bättre)



Vektorfältet
$\mathbf{F}(x, y) = \langle -y, x \rangle$
(omskalat för att kunna se bättre)

(fås genom att rotera $\langle x, y \rangle$ 90 grader moturs)