

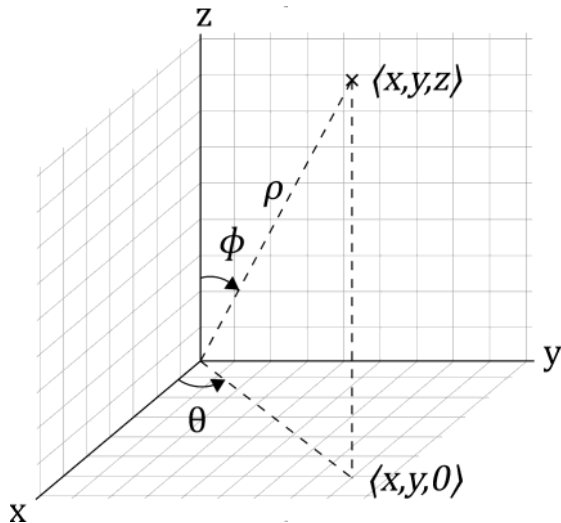
Sammanfattning Föreläsning 15

Sfäriska koordinater

ρ = avståndet till origo ($\rho \geq 0$)

θ = vinkeln mellan $\langle x, y, 0 \rangle$
och positiva x -axeln
(oftast $0 \leq \theta \leq 2\pi$ eller $-\pi \leq \theta \leq \pi$)

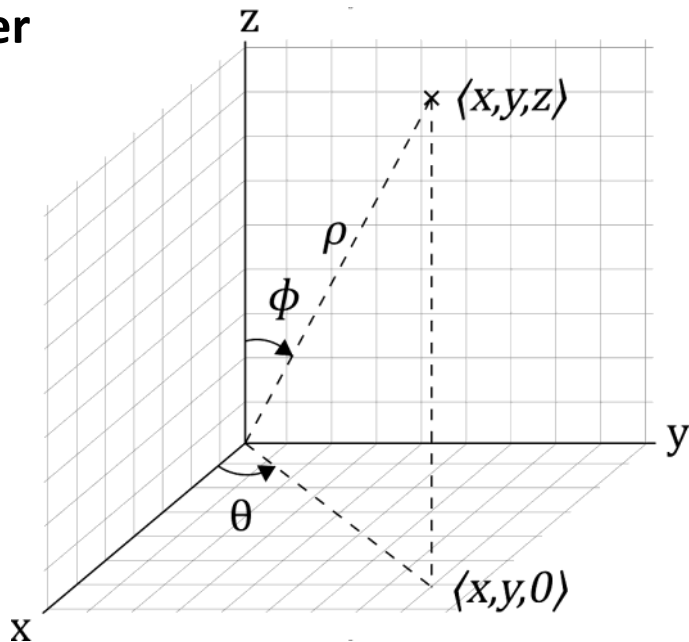
ϕ = vinkeln mellan $\langle x, y, z \rangle$
och positiva z -axeln
($0 \leq \phi \leq \pi$)



Anpassad från "3D Spherical 2.svg"
© Dmcq [CC BY-SA 3.0] / Wikipedia Commons

Formel för sfäriska koordinater

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$$



Anpassad från "3D Spherical 2.svg"

© Dmcq [CC BY-SA 3.0] / Wikipedia Commons

Integration i sfäriska koordinater

E "sfärisk låda": $a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d$

$$\iiint_E g(x, y, z) dV = \int_a^b \int_c^d \int_\alpha^\beta g(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi \, d\theta d\phi d\rho.$$

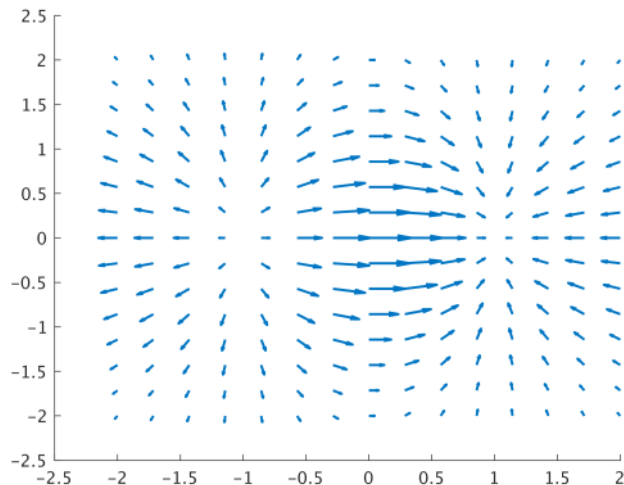
Kortare: $dV = \rho^2 \sin \phi \, d\theta d\phi d\rho$ och $\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$

Vektorfält

Funktioner $\mathbf{F}$ från $D \subseteq \mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$:

För varje $(x, y) \in D$ får man
en vektor $\mathbf{F}(x, y) \in \mathbb{R}^2$

(eller motsvarande i $\mathbb{R}^3$)



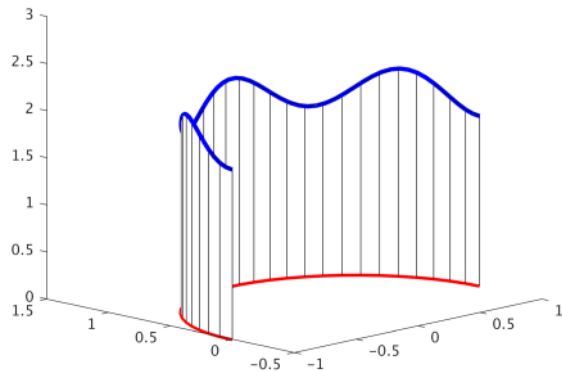
$\int_a^b f(x)dx =$ "arean under grafen $y = f(x)$ när $a \leq x \leq b$ "

Vill definiera

kurvintegral av en funktion $f(x, y)$ längs en kurva C

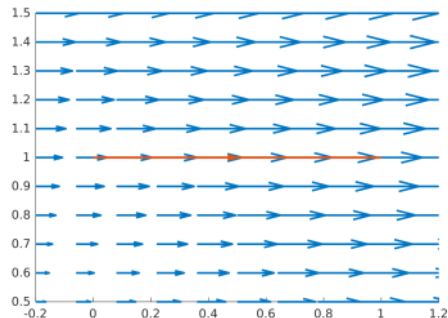
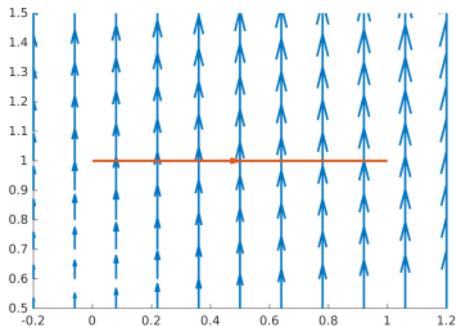
$\int_C f(x, y)ds$ som

"arean under grafen $z = f(x, y)$
när (x, y) går längs C "



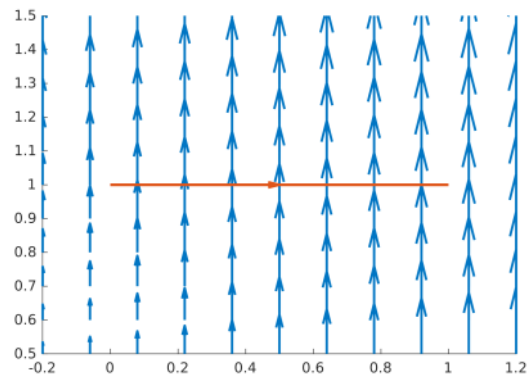
Om $\mathbf{F}(x, y) = \langle 0, x + y \rangle$ eller $\mathbf{F}(x, y) = \langle x + y, 0 \rangle$ och C är kurvan som parametreras av $\mathbf{r}(t) = \langle t, 1 \rangle$, $0 \leq t \leq 1$, vad har $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ för tecken?

- a) > 0
- b) < 0
- c) $= 0$

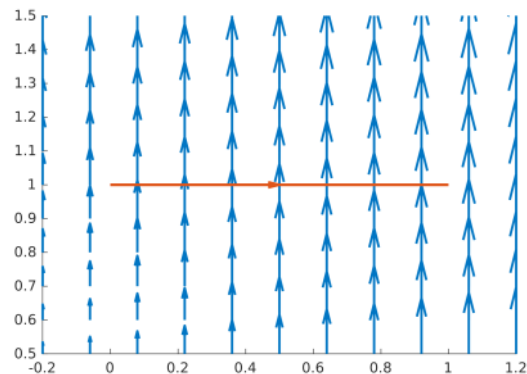


Om $\mathbf{F}(x, y) = \langle 0, x + y \rangle$ och $\mathbf{r}(t) = \langle t, 1 \rangle$,

...



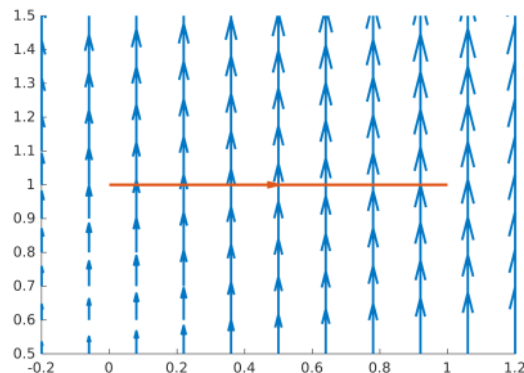
Om $\mathbf{F}(x, y) = \langle 0, x + y \rangle$ och $\mathbf{r}(t) = \langle t, 1 \rangle$,
så pekar $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ alltid bara i y -led,
medan $\mathbf{r}'(t) = \langle 1, 0 \rangle$ pekar bara i x -led.



Om $\mathbf{F}(x, y) = \langle 0, x + y \rangle$ och $\mathbf{r}(t) = \langle t, 1 \rangle$,
så pekar $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ alltid bara i y -led,
medan $\mathbf{r}'(t) = \langle 1, 0 \rangle$ pekar bara i x -led.

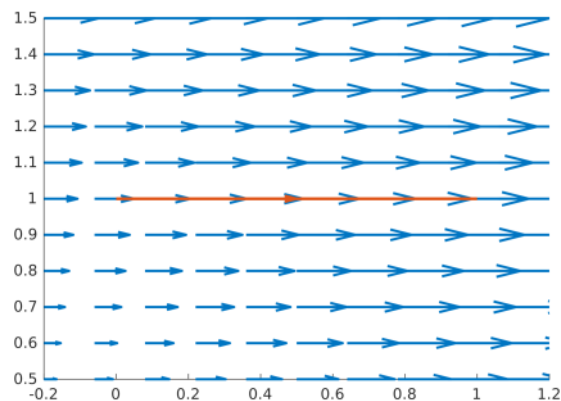
Alltså blir $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$, så

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

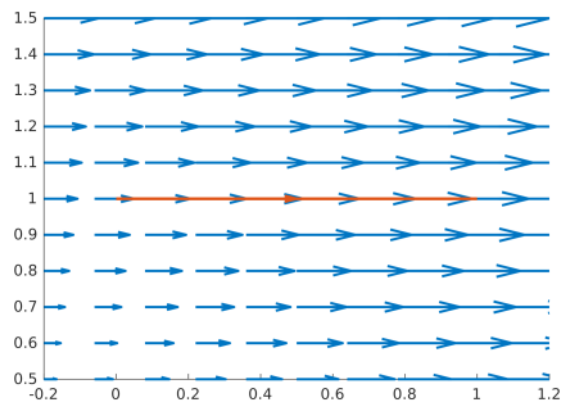


Om $\mathbf{F}(x, y) = \langle x + y, 0 \rangle$ och $\mathbf{r}(t) = \langle t, 1 \rangle$,

...



Om $\mathbf{F}(x, y) = \langle x + y, 0 \rangle$ och $\mathbf{r}(t) = \langle t, 1 \rangle$,
så pekar $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ alltid i positiv x -riktning,
och $\mathbf{r}'(t) = \langle 1, 0 \rangle$ pekar också i positiv x -riktning.



Om $\mathbf{F}(x, y) = \langle x + y, 0 \rangle$ och $\mathbf{r}(t) = \langle t, 1 \rangle$,
så pekar $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ alltid i positiv x -riktning,
och $\mathbf{r}'(t) = \langle 1, 0 \rangle$ pekar också i positiv x -riktning.

Alltså blir $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) > 0$, så

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) > 0$$

