

Sammanfattning Föreläsning 15

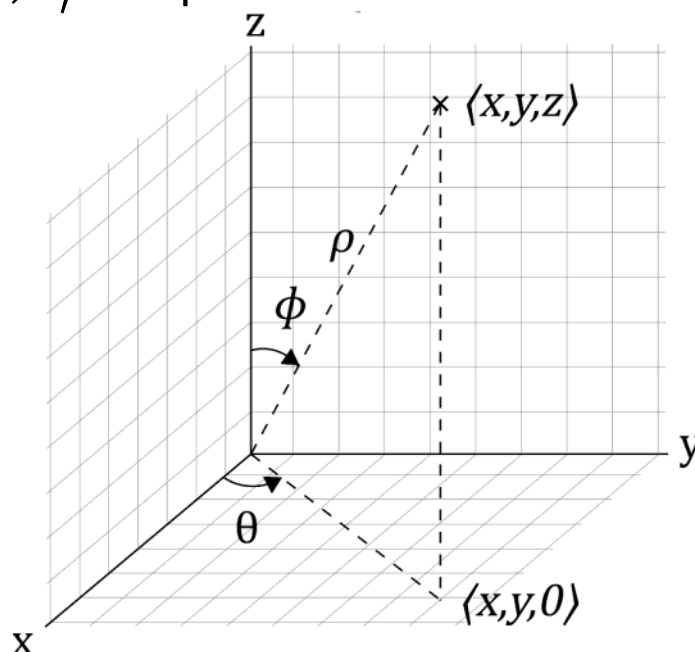
Sfäriska koordinater

ρ = avståndet till origo ($\rho \geq 0$)

θ = vinkeln mellan $\langle x, y, 0 \rangle$ och positiva x -axeln
(oftast $0 \leq \theta \leq 2\pi$ eller $-\pi \leq \theta \leq \pi$)

ϕ = vinkeln mellan $\langle x, y, z \rangle$ och positiva z -axeln
($0 \leq \phi \leq \pi$)

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$$



Anpassad från "3D Spherical 2.svg"
© Dmcq [CC BY-SA 3.0] / Wikipedia Commons

Integration i sfäriska koordinater

E "sfärisk låda": $a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d$

$$\iiint_E g(x, y, z) dV = \int_a^b \int_c^d \int_\alpha^\beta g(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\theta d\phi d\rho$$

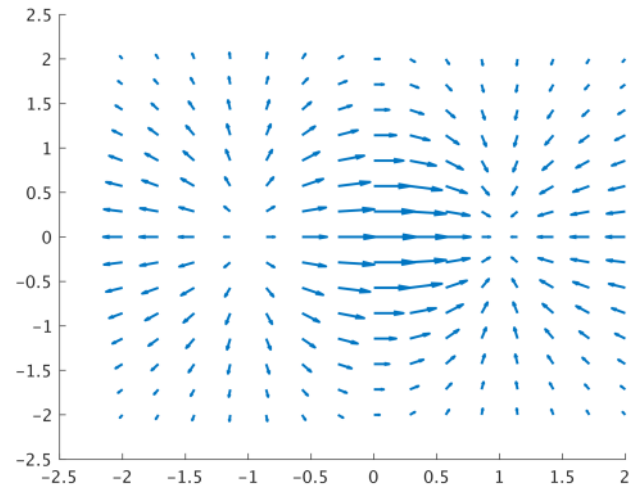
Kortare: $dV = \rho^2 \sin \phi d\theta d\phi d\rho$

Vektorfält

Funktioner $\mathbf{F}$ från $D \subseteq \mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$:

För varje $(x, y) \in D$ får man
en vektor $\mathbf{F}(x, y) \in \mathbb{R}^2$

(eller motsvarande i $\mathbb{R}^3$)



Kurvintegraler av funktioner 16.2

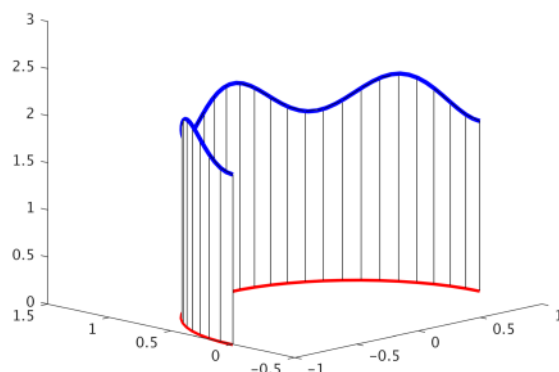
$$\int_a^b f(x)dx = \text{"arean under grafen } y = f(x) \text{ när } a \leq x \leq b"$$

Vill definiera

kurvintegral av en funktion $f(x, y)$ längs en kurva C

$$\int_C f(x, y)ds \text{ som}$$

"arean under grafen $z = f(x, y)$
när (x, y) går längs C "



C kurva med parametrisering $r(t)$, $a \leq t \leq b$,
Antar r glatt (smooth), dvs. $r'(t)$ existerar och är kont.

$f(x, y)$ funktion def. på C .

Vill def. integral av f längs C , s.a. ger arean under grafen längs C . Gör som tidigare m.h.a. Riemannsummor. Liknande härledning som för längden av kurvor ger:

Formel för kurvintegral av funktion f , f kont. på C :

$$\int_C f ds = \int_a^b f(r(t)) |r'(t)| dt$$

Om $f=1$ ger detta den tidigare formeln för längden.

ds kallas längdelement, och formeln förkortas ofta

$$\boxed{ds = |r'(t)| dt} \quad (\text{formelblad})$$

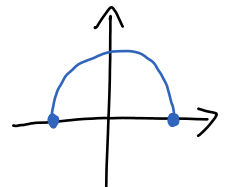
Anm: Formeln för kurvintegralen är i termer av en parametrisering $r(t)$ av en kurva C .

Men, i själva verket beror den inte på parametriseringen utan bara på C , dvs. punkterna $\{r(t) \mid a \leq t \leq b\}$. Man kan därför välja vilken parametrisering man vill.

Ex Övre halvan av enhetscirkeln kan t.ex. parametriseras med

a) $r_1(t) = \langle \cos t, \sin t \rangle, \quad 0 \leq t \leq \pi$

b) $r_2(t) = \langle t, \sqrt{1-t^2} \rangle, \quad -1 \leq t \leq 1.$



(Obs: Går åt olika håll, spelar ingen roll här, men kommer göra skillnad för kurvintegraler av vektorfält.)

På liknande sätt som tidigare kan man härleda:

Om en tunn tråd med densitet $\rho(x,y)$ går längs C är dess

$$\underline{\text{massa}} \quad m = \int_C \rho(x,y) ds$$

$$\underline{\text{masscentrum}} \quad (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m} \right) \quad \text{där}$$

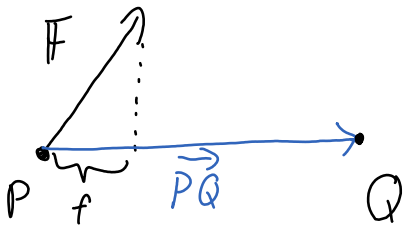
$$M_x = \int_C x \rho(x,y) ds, \quad M_y = \int_C y \rho(x,y) ds.$$

Kurvintegraler av vektorfält 16.2

(Motiveras av arbete i fysik)

| en dimension: arbetet utfört av en konstant kraft F på en partikel som förflyttar sig sträckan d är $F \cdot d$.
(kan vara pos. eller neg.)

| två eller tre dimensioner, om en kraft F verkar på en partikel som förflyttas från P till Q blir arbetet $F \cdot \vec{PQ}$



$$\text{arbete} = f \cdot |\vec{PQ}| = F \cdot \vec{PQ}$$

se avsh. 12.3.

| Arbetet beror bara på delen av F som pekar i riktningen av $\vec{PQ}$

Antag nu har kurva C , par. av $\mathbb{R}(t)$, $a \leq t \leq b$, är glatt.

Om har kraftfält $F(x,y)$ som varierar, vill att kurvintegralen av F längs C ger arbetet som F utför på en partikel som rör sig längs C .

Kan härleda m.h.a. Riemannsummor att arbetet ges av följande integral, se avsh. 16.2.

Def av kurvintegral av vektorfält $\mathbf{F}$ längs kurva C
parametriserad av $\mathbf{r}(t)$.

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

Kort: $\boxed{d\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t) dt}$ (formelblad)

Ex Beräkna arbetet som utförs av kraftfältet
 $\mathbf{F}(x,y) = \langle 0, -2y \rangle$ om en partikel sig längs
kurvan C som ges av $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq \pi/2$.

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \mathbf{F}(\cos t, \sin t) = \langle 0, -2\sin t \rangle.$$

$$\mathbf{r}'(t) = \langle -\sin t, \cos t \rangle.$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0 \cdot (-\sin t) - 2\sin t \cos t = -\sin(2t).$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_0^{\pi/2} (-\sin(2t)) dt = \left[\frac{\cos(2t)}{2} \right]_0^{\pi/2} =$$

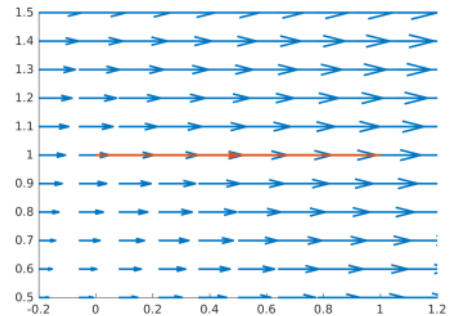
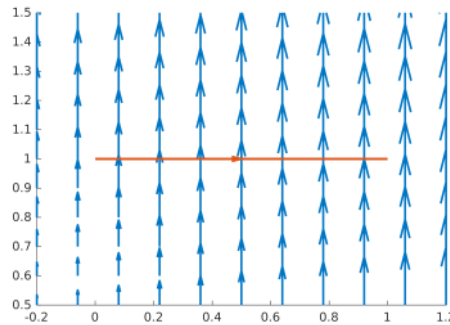
$$= \frac{\cos(\pi) - \cos(0)}{2} = -1.$$

(Rimligt negativ, för kraften pekar nedåt, rör sig snett uppåt)

Classtime

Om $\mathbf{F}(x, y) = \langle 0, x + y \rangle$ eller $\mathbf{F}(x, y) = \langle x + y, 0 \rangle$ och C är kurvan som parametriseras av $\mathbf{r}(t) = \langle t, 1 \rangle$, $0 \leq t \leq 1$, vad har $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ för tecken?

- a) > 0
- b) < 0
- c) $= 0$



Om $\mathbf{F}(x, y) = \langle 0, x + y \rangle$ och $\mathbf{r}(t) = \langle t, 1 \rangle$, så pekar $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ alltid bara i y -led, medan $\mathbf{r}'(t) = \langle 1, 0 \rangle$ pekar bara i x -led.

Alltså blir $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$, så

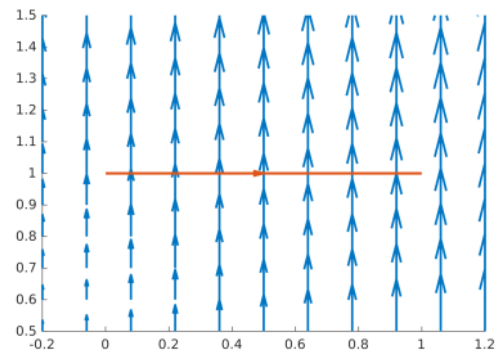
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

Klassens svar:

✓ $= 0$ 69%

✗ > 0 29%

✗ < 0 3%



Om $\mathbf{F}(x, y) = \langle x + y, 0 \rangle$ och $\mathbf{r}(t) = \langle t, 1 \rangle$, så pekar $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ alltid i positiv x -riktning, och $\mathbf{r}'(t) = \langle 1, 0 \rangle$ pekar också i positiv x -riktning.

Alltså blir $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) > 0$, så

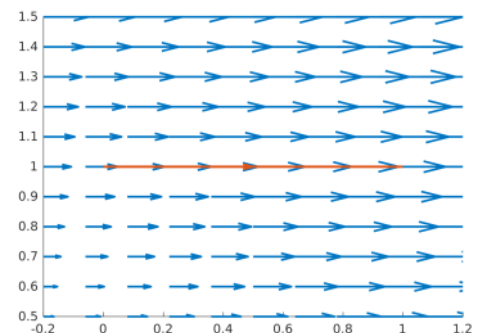
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) > 0$$

Klassens svar:

✓ > 0 74%

✗ $= 0$ 20%

✗ < 0 6%



Huvudsatsen för kurvintegraler 16.3

Enkelt integrera gradientfält:

Sats Antag C kurva som ges av $r(t)$, $a \leq t \leq b$ och f s.a. ∇f kont. längs C .

$$\text{Då är } \int_C \nabla f \cdot dr = f(r(b)) - f(r(a)).$$

Om $r(t) = \langle t, 0 \rangle$ och f bara beror på x blir detta integralkalkylens huvudsats:

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

Satsen i allmänhet följer av detta specialfallet plus kedjeregeln, se avsn. 16.3.

Def Ett vektorfält är konservativt om $IF = \nabla f$ för någon funktion f .

f kallas då en potential till IF .

Om IF är ett kraftfält som är konservativt, vilket t.ex. gravitationsfält typiskt är (jmf slutet på avsn. 16.1) och P är den potentiella energin så är $-P$ en potential till IF , dvs. $IF = \nabla(-P)$.

(Detta är en förklaring till namnet potential.)

Det följer av huvudsatsen och integralkalkylens huvudsats, att för ett konservativt kraftfält bevaras den totala mekaniska energin (potentiell energi + rörelseenergi), se slutet av avsn. 16.3.

Konservativa vektorfält lätta att integrera.
Hur avgöra om ett vektorfält är konservativt?

Om $\vec{F} = \langle P, Q \rangle = \nabla f = \langle f_x, f_y \rangle$ och f har kont. part. derivator av ordning 2 så är

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (f_x) = f_{xy} = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} (f_y) = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

(Clairaut's sats)

Så måste ha $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ om konservativt.

Skall se att villkoret ibland medför konservativt.

Behöver först:

Def En enkel sluten (simple closed) kurva börjar och slutar i samma punkt (sluten) och korsar aldrig sig själv (enkel).

Def En mängd är enkelt sammanhängande om den "inte innehåller några hål".

Mer precist: För varje enkel sluten kurva C i D , så ligger alla punkter innanför C också i D .

Ex a) $\mathbb{R}^2$, $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ enkelt sammanhängande.

b) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\{(x,y) \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$ inte enkelt sammanhängande.

