

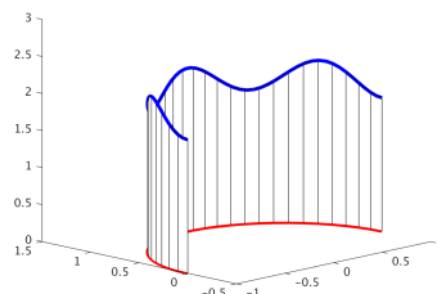
Sammanfattning Föreläsning 16

Kurvintegral av en funktion $f(x, y)$ längs en kurva C

$$\int_C f(x, y) ds =$$

"arean under grafen $z = f(x, y)$

när (x, y) går längs C "



Om C ges av $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ är

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt$$

- Om en tunn tråd går längs en kurva C med densitet $\rho(x, y)$, är dess

- **massa** $m = \int_C \rho(x, y) ds$

- **masscentrum** $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m} \right)$ där

$$M_x = \int_C x \rho(x, y) ds \text{ och } M_y = \int_C y \rho(x, y) ds$$

- **Kurvintegral av vektorfält $\mathbf{F}$ längs kurva C**
som ges av $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$.

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

(Kort: $d\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t) dt$)

Om $\mathbf{F}$ kraftfält ger kurvintegralen *arbetet* som kraftfältet utför på en partikel som rör sig längs C .

- **Huvudsatsen för kurvintegraler:** Om C ges av $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ så är

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

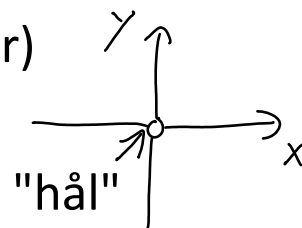
- Ett vektorfält $\mathbf{F}$ är **konservativt** om $\mathbf{F} = \nabla f$, dvs det är gradienten av en funktion f , och f kallas då **potential** till $\mathbf{F}$.
- Om $\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$ är konservativt så är

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$
- En kurva C är **enkel och sluten** om den börjar och slutar i samma punkt och inte korsar sig själv
- Ett område $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är **enkelt sammanhängande** om den "*inte innehåller några hål*".
(Mer precist uttryckt m.h.a. enkla slutna kurvor)

Exempel:

$\mathbb{R}^2$ enkelt sammanhängande

$\mathbb{R}^2 \setminus \{ (0,0) \}$ ej enkelt sammanhängande



Konservativa vektorfält 16.3

Sats Om $F = \langle P, Q \rangle$ vektorfält på $D \subseteq \mathbb{R}^2$,
 D enkelt sammanhängande, och $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ på D ,
då är F konservativt.

Anm Satsen gäller inte på områden D som inte är enkelt sammanhängande, som t.ex. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, se t.ex. övning 16.3.35.

Metod för att hitta potential om den existerar:

$$\text{Vill lösa: } \begin{cases} f_x = P & (i) \\ f_y = Q & (ii) \end{cases}$$

a) Tar först en lösning till (i), dvs. en primitiv funktion f_0 till P m.a.p. x . Allmänna lösn. till (i) är då

$$f(x,y) = f_0(x,y) + g(y) \quad (*) \quad (g(y) \text{ oberoende av } x)$$

(Kvar bestämma g . Gör det m.h.a. (ii))

b) Sätter in (*) i (ii) för att bestämma g :

$$Q \stackrel{(ii)}{=} f_y \stackrel{(*)}{=} (f_0)_y + g'(y)$$

$\Rightarrow g(y)$ primitiv funktion till $Q - (f_0)_y$ m.a.p. y .

(Obs! Måste få att $Q = f_0)_y$ bara beror på y ,
annars något fel.)

Classtime

Om

$$\mathbf{F}(x, y) = \langle 2x + y, 2x + y \rangle \text{ eller}$$

$$\mathbf{F}(x, y) = \langle 2x + y, x + 2y \rangle,$$

är då $\mathbf{F}(x, y)$ konservativt?

$$\text{Låt } \mathbf{F}(x, y) = \langle P, Q \rangle = \langle 2x + y, 2x + y \rangle.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (2x + y) = 1$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (2x + y) = 2$$

✗ True 13%

✓ False 88%

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \langle P, Q \rangle \text{ ej konservativt.}$$

$$\text{Låt } \mathbf{F}(x, y) = \langle P, Q \rangle = \langle 2x + y, x + 2y \rangle.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (2x + y) = 1$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x + 2y) = 1$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ och}$$

$\langle P, Q \rangle$ definierat på $\mathbb{R}^2$ som är enkelt sammanhängande
 $\Rightarrow \langle P, Q \rangle$ konservativt.

✓ True 90%

✗ False 10%

Ex Bestäm en potential till $\vec{F} = \langle 2x+y, x+2y \rangle$.

Säg precis att $\vec{F}$ är konservativt, så finns potential.

a) En primitiv funktion m.a.p. x till $2x+y$ m.a.p. x är $f_0 = x^2 + xy$.

Allmänna lösn. till (i) är då $f(x,y) = x^2 + xy + g(y)$ (*)

$$b) \quad x+2y \stackrel{(iii)}{=} f_y \stackrel{(ii)}{=} \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + xy + g(y)) = x + g'(y).$$

$$\Rightarrow g'(y) = -2y \Rightarrow g(y) = -y^2 + C$$

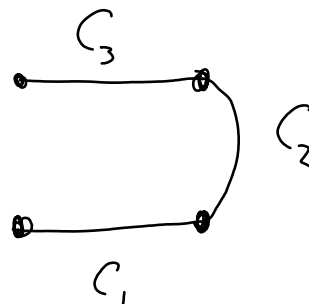
$$\Rightarrow f = f_0 + g = x^2 + xy - y^2 + C \quad \text{potential till } \vec{F}.$$

Greens formel 16.4

Förberedelser:

- 1) Kommer anta C styckvis glätt, dvs C kan delas upp i glatta kurvor $C_1, \dots, C_m$, där C_i slutar där C_{i+1} börjar.

(Tillåts då ha "hörn", som t.ex. randen till triangel eller kvadrat)



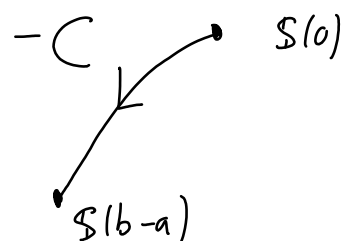
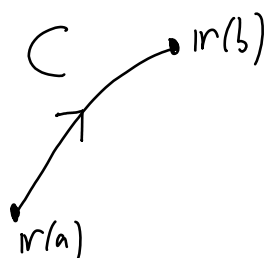
Då definierar man
$$\int_C f ds = \int_{C_1} f ds + \dots + \int_{C_m} f ds$$

och
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \dots + \int_{C_m} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

- 2) Kurvintegralen av ett vektorfält längs en kurva C som parametreras av $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ beror på kurvans sedd som en orienterad kurva, vilken består av dess punkter $\{\mathbf{r}(t) \mid a \leq t \leq b\}$ och riktningen man går längs kurvan.

Kurvan $-C$ består av samma punkter, men går i motsatt riktning, och kan t.ex. parametreras med

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{r}(b-t), \quad 0 \leq t \leq b-a.$$



Från def. av kurvintegral av vektorfält följer att

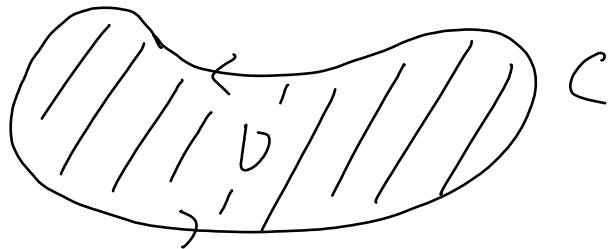
$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \left(\begin{array}{l} \text{rimligt från tolkningen} \\ \text{av arbete} \end{array} \right)$$

$$\left(\text{Däremot: } \int_{-C} f ds = \int_C f ds \right)$$

3) Låt C vara en enkel sluten kurva (som alltså börjar och slutar i samma punkt, och inte korsar sig själv).

Då begränsar C ett område D , dvs. C är randen till D .

(Om C parametreras av $|r(t)|$ och $|r'(t)|$ bara antas kont.,
kallas detta Jordans kurvsats.
Kompllicerat att bevisa.)



C är positivt orienterad om den går moturs kring D , dvs. D ligger till vänster om man följer C i positiv riktning.

Annars är C negativt orienterad och då är $-C$ positivt orienterad.

Notation Antag C ges av $r(t)$, $a \leq t \leq b$.

Låt $F = \langle P, Q \rangle$ och $r(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$. Då skrivs

$$\int_C F \cdot dr = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int_a^b P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t) dt$$

också som

$$\int_C P dx + Q dy, \quad \text{dvs.} \quad \boxed{dx = x'(t) dt \text{ och } dy = y'(t) dt}$$

Greens formel/sats Om C enkel sluten positivt orienterad kurva som begränsar området D , och P, Q har kontinuerliga partiella derivator är

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dA \quad (\text{formelblad})$$

(Google: formel vanligare på svenska, theorem vanligare på engelska)

Liknande form som integralkalkylens huvudsats: $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$

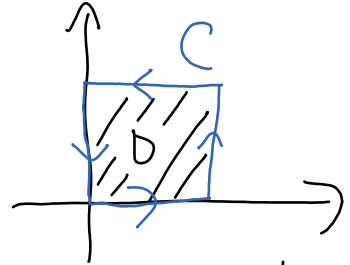
Båda formlerna säger att integral av derivata på område kan uttryckas m.h.a. värden på randen.

Beriset av Greens formel när D är ett typ I och typ II-område följer relativt enkelt från integralkalkylens huvudsats och formeln för upprepad integration, se avsn. 16.4.

Ex Beräkna $\int_C (yx^2 - e^{x^2})dx + (e^{y^3} + x^3)dy$,

där C är den positivt orienterade randen till $D = [0, 1] \times [0, 1]$.

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dA =$$



$$= \iint_D (3x^2 - x^2) dA = \int_0^1 \int_0^1 2x^2 dy dx = \int_0^1 2x^2 dx = \left[\frac{2x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Kan som ovan använda Greens formel för att beräkna kurvintegraler som dubbelintegraler. Ibland användbart göra tvärtom.

Greens formel och areor

Om tar $\langle P, Q \rangle$ som $\langle -y, 0 \rangle$, $\langle 0, x \rangle$ eller $\langle -\frac{y}{2}, \frac{x}{2} \rangle$ blir

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 \quad \text{så}$$

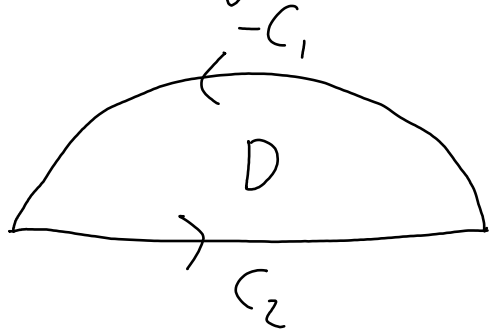
$$\text{area}(D) = \iint_D 1 dA = \int_C x dy = \int_C -y dx = \frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy$$

Ex Beräkna området under kurvan

$$\langle t - \sin t, 1 - \cos t \rangle \text{ för } 0 \leq t \leq 2\pi$$

(Gick inte igenom räkningarna nedan på föreläsningen)

Området begränsas av C enligt figur:



$$C_1: r_1(t) = \langle t - \sin t, 1 - \cos t \rangle$$

$$C_2: r_2(t) = \langle t, 0 \rangle$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

Arean ges då av

$$A = - \int_C y dx = - \int_{C_1} y dx - \int_{C_2} y dx = \int_{C_1} y dx - \int_{C_2} y dx =$$

$$\int_{C_1} y dx = \int_0^{2\pi} y(t) x'(t) dt = \int_0^{2\pi} \underbrace{(1 - \cos t)^2}_{= 1 - 2\cos t + \cos^2 t} dt = \left\{ \cos^2 t = \frac{1 + \cos(2t)}{2} \right\} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} + 2\cos t + \cos 2t dt = \frac{3}{2} \cdot 2\pi = 3\pi$$

(integral av $\cos t$ & $\cos 2t$ över en period 2π är 0)

$$\int_{C_2} y dx = 0 \text{ för } y=0 \text{ på } C_2.$$

$$\text{Alltså: } A = 3\pi.$$