

Sammanfattning Föreläsning 17

- **Sats** Om $\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$ är ett vektorfält på $D \subseteq \mathbb{R}^2$, där D är enkelt sammanhängande och

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$
 så är $\mathbf{F}$ konservativt på D , dvs $\mathbf{F} = \nabla f$ för någon funktion f .

(Tidigare, såg att ekvationen *måste* vara uppfylld för att skall vara konservativt, denna satsen säger att det *räcker*)

Metod för att hitta potential f till konservativt vektorfält

$$F = \langle P, Q \rangle: \quad \text{Vill lösa} \begin{cases} f_x = P & (i) \\ f_y = Q & (ii) \end{cases}$$

1. Tar först en lösning f_0 till (i), $f_0 = \int P \, dx$. Allmänna lösningen till (i) är då $f(x, y) = f_0(x, y) + g(y)$ (*).
2. Sätter in lösningen från (*) i (ii) för att bestämma g :

$$Q \underset{(ii)}{=} f_y \underset{(*)}{=} (f_0)_y + g'(y) \Rightarrow g(y) = \int Q - (f_0)_y \, dy.$$

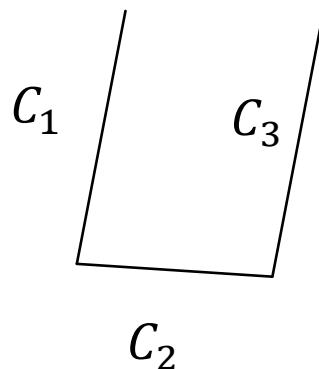
En kurva C är **styckvis glatt** om den kan delas upp i glatta kurvor $C_1, \dots, C_m$ där C_i slutar där C_{i+1} börjar.

Då definierar man

$$\int_C f \, ds = \int_{C_1} f \, ds + \dots + \int_{C_m} f \, ds$$

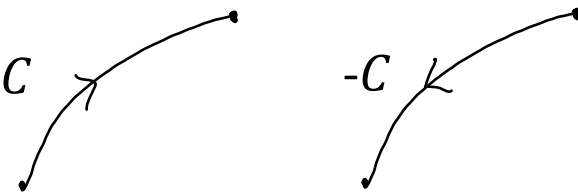
och

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \dots + \int_{C_m} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$



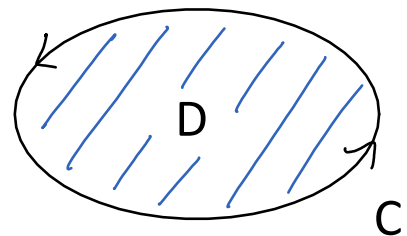
För integraler av vektorfält längs C ser man C som en *orienterad kurva*, dvs. den består av punkter och en riktning.

Man definierar kurvan $-C$ som kurvan som består av samma punkter men går i motsatt riktning.

$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$


En enkel sluten kurva C (som *börjar och slutar i samma punkt och inte korsar sig själv*) **begränsar** ett område D , dvs. C är randen till D .

C är **positivt orienterad** om den går moturs kring D (D på vänster sida om man följer C i positiv riktning), annars är den **negativt orienterad**.



Notation

C kurva, parametriseras av $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$

$\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$ vektorfält

Då betecknar man

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_C P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) dt$$

också med

$$\int_C P dx + Q dy$$

(dvs $dx = x'(t) dt$ och $dy = y'(t) dt$)

Greens formel: Låt C vara en enkel sluten positivt orienterad kurva som begränsar området D . Då är

$$\int_C P \, dx + Q \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Användbart specialfall:

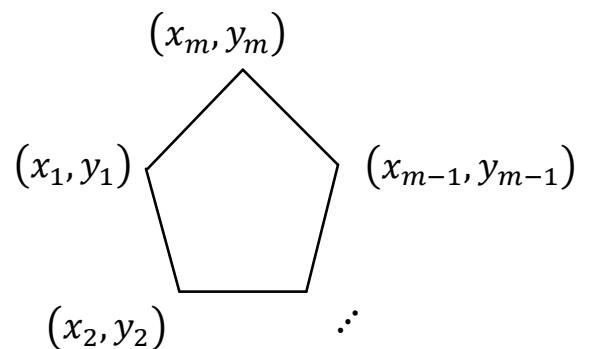
$$\text{area}(D) = \int_C -y \, dx = \int_C x \, dy = \frac{1}{2} \int_C -y \, dx + x \, dy$$

Exempel på användningar av Green's formel:

- a) Planimeter: verktyg som mäter area av områden
- b) Bevisa satsen om konservativa vektorfält på enkelt sammanhängande områden (s. 1101)
- c) Formel för area av polygon (nedan)

Exempel En polygon är ett område i planet som begränsas av ett antal rätta linjer som inte skär varandra.

Om polygonen har hörn i $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$, uppräknade moturs, så ger formeln $A = \frac{1}{2} \int_C -y \, dx + x \, dy$ att polygonens area är



$$\frac{1}{2} ((x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \cdots + (x_{m-1} y_m - x_m y_{m-1}) + (x_m y_1 - x_1 y_m))$$

(se övning 16.4.21)

Parametriserade ytor 16.6

(Tar 16.5 i samband med 16.8 & 16.9)

En kurva C har dimension 1, dvs. beskrivs med en parameter: $r(t)$.

Def En parametriserad yta S är alla punkter $\{r(u,v) \mid (u,v) \in D\}$,
där $D \subseteq \mathbb{R}^2$ och $r: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ är en vektorvärd funktion.

En yta har dimension 2, dvs. beskrivs med två parametrar

Skrivs ofta i komponenter: $r(u,v) = \langle x(u,v), y(u,v), z(u,v) \rangle$.

Ex a) Om $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ är grafen $z=f(x,y)$ en parametriserad yta:

$$r(u,v) = \langle u, v, f(u,v) \rangle$$

(Skriver ofta $r(x,y) = \langle x, y, f(x,y) \rangle$ istället)

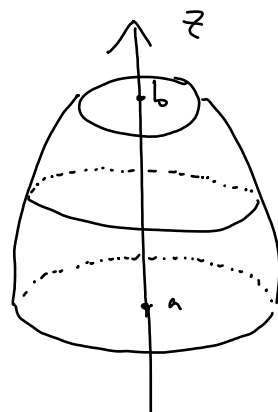
b) Om $g: [a,b] \rightarrow [0, \infty)$ ges rotationsytan kring z -axeln

med radie $g(z)$ av $r(u,v) = \langle g(u)\cos v, g(u)\sin v, u \rangle$

$$(u,v) \in [a,b] \times [0, 2\pi].$$

(cylindriska koord.: $r=g(u)$, $\theta=v$, $z=u$)

$$r=g(z)$$



Classtime

Vad parametriserar $\mathbf{r}(\phi, \theta) = \langle \sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi \rangle$, $0 \leq \phi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ för en yta?

Vad parametriserar $\mathbf{r}(z, \theta) = \langle z \cos \theta, z \sin \theta, z \rangle$, $0 \leq z \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ för en yta?

Vad parametriserar $\mathbf{r}(z, \theta) = \langle \cos \theta, \sin \theta, z \rangle$, $0 \leq z \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ för en yta?

- ☐ En kon
- ☐ En sfär
- ☐ En cylinder

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = \langle \sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi \rangle,$$
$$0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Sfäriska koordinater

$$(x, y, z) = (\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi)$$

Så $\mathbf{r}$ parametriserar området i sfäriska koordinater:

$$\rho = 1, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

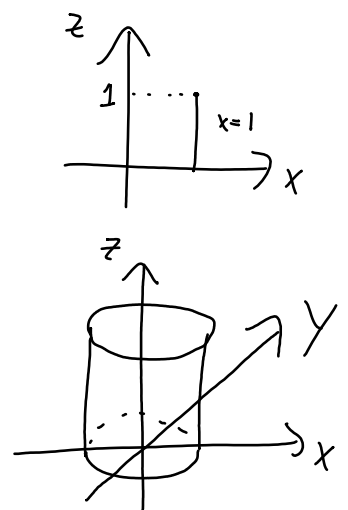
Blir en **sfär** (med centrum i origo och radie 1).

$$\mathbf{r}(z, \theta) = \langle \cos \theta, \sin \theta, z \rangle,$$
$$0 \leq z \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Är en rotationsyta med radien $r = 1$.

Fås alltså genom att ta $x = 1$, $0 \leq z \leq 1$ och rotera kring z -axeln.

Blir en **cylinder**.



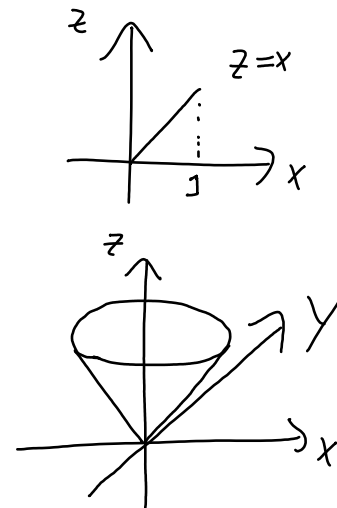
$$\mathbf{r}(z, \theta) = \langle z \cos \theta, z \sin \theta, z \rangle,$$

$$0 \leq z \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Är en rotationsyta med radien $r = z$.

Fås alltså genom att ta $x = z$, $0 \leq z \leq 1$ och rotera kring z -axeln.

Blir en **kon**.



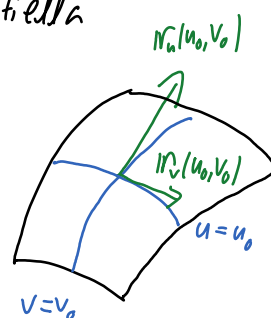
Tangentplan till parametriserade ytor 16.6

Låt S vara en yta som ges av $\mathbf{r}(u, v)$.

Fixera en punkt $\langle a, b, c \rangle = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ på S .

Låt $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)$ och $\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$ vara de partiella derivatorna av $\mathbf{r}$ m.a.p. u resp. v i $(u, v) = (u_0, v_0)$.

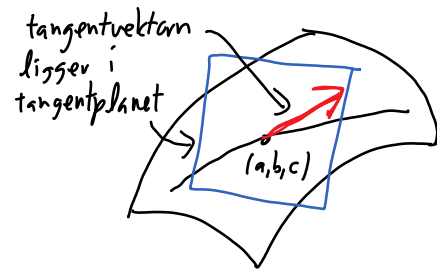
Kurvorna $\mathbf{r}_1(u) = \mathbf{r}(u, v_0)$ och $\mathbf{r}_2(v) = \mathbf{r}(u_0, v)$ ligger i S och dess tangentvektorer i u_0 resp. v_0 är de partiella derivatorna ovan.



Def S är glatt i $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ om

$$\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0) \neq 0 \quad (\Leftrightarrow \text{de är ej parallella})$$

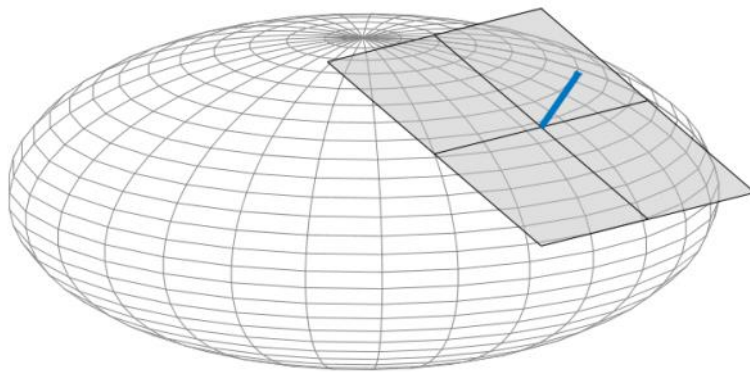
Def Om S är glatt i $(a,b,c) = r(u_0, v_0)$ är dess tangentplan det plan som går genom (a,b,c) och innehåller alla tangentvektorer till kurvor i S genom (a,b,c) .



Formel: Tangentplanet har normalvektor $n = r_u(u_0, v_0) \times r_v(u_0, v_0)$ och om skriver $n = (n_1, n_2, n_3)$ så ges tangentplanet av

$$n_1(x-a) + n_2(y-b) + n_3(z-c) = 0.$$

Liknande härledning som för tangentplan av nivåyta, se kurshemsidan.



Tangentplan
till ellipsoid
(och planets
normalvektor)

Om S är grafen $z=f(x,y)$ får man samma formel som tidigare för tangentplanet, för om

$$r(x,y) = \langle x, y, f(x,y) \rangle \text{ blir}$$

$$n = r_x \times r_y = \begin{vmatrix} \overset{i}{1} & \overset{j}{0} & \overset{k}{f_x} \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = \langle -f_x, -f_y, 1 \rangle,$$

och $r(a,b) = \langle a, b, f(a,b) \rangle$, så tangentplanet blir:

$$-f_x(a,b)(x-a) - f_y(a,b)(y-b) + 1 \cdot (z - f(a,b)) = 0 \quad (\Rightarrow)$$

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b).$$

Area av parametriserade ytor 16.6

Formel för area av yta S parametriserad av $\mathbf{r}(u,v)$, $(u,v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$

$$A = \iint_D |\mathbf{r}_u(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v)| dA$$

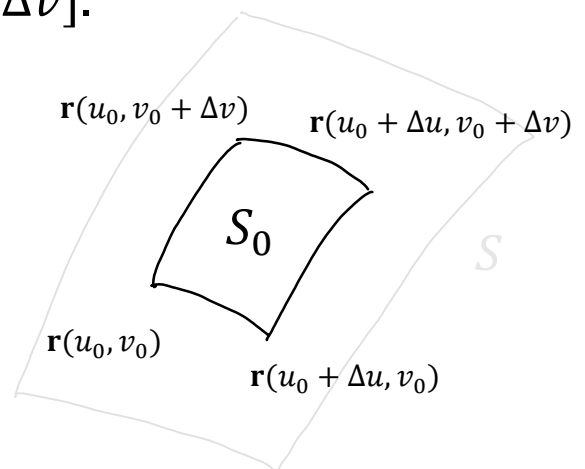
Härledning av formel för arean av parametriserad yta

Antar S yta parametriserad av $\mathbf{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$.

Tag $(u_0, v_0) \in D$ och $\Delta u, \Delta v > 0$.

Låt S_0 vara delen av S där

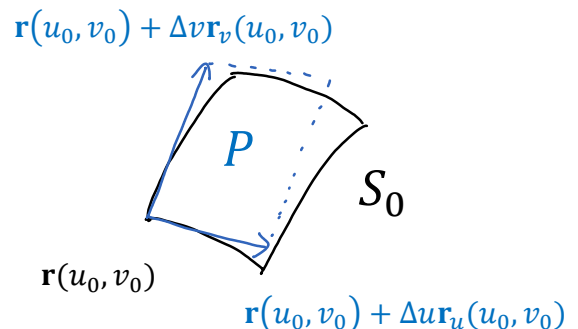
$$(u,v) \in [u_0, u_0 + \Delta u] \times [v_0, v_0 + \Delta v].$$



Med hjälp av linearisering följer att

$$\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) \approx \mathbf{r}(u_0, v_0) + \Delta u \mathbf{r}_u(u_0, v_0) \text{ osv.}$$

Därför är S_0 nära parallelogrammet P enligt figur.



Bör då ha:

$$\text{area}(S_0) \approx \text{area}(P),$$

och uppskattningen bättre

och bättre desto mindre Δu och Δv är.

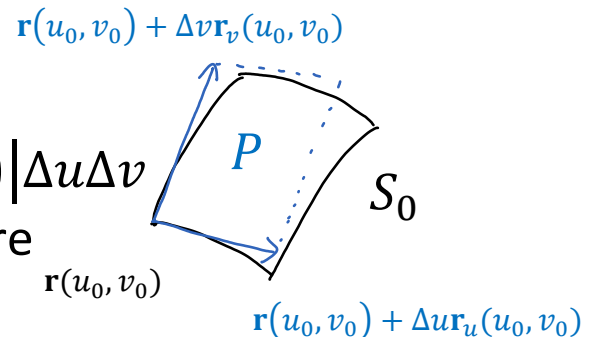
Enligt egenskaper för kryssprodukt är

$$\begin{aligned}\text{area}(P) &= \left| \left(\Delta u \mathbf{r}_u(u_0, v_0) \right) \times \left(\Delta v \mathbf{r}_v(u_0, v_0) \right) \right| \\ &= \left| \mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0) \right| \Delta u \Delta v\end{aligned}$$

Alltså blir

$$\text{area}(S_0) \approx \left| \mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0) \right| \Delta u \Delta v$$

och uppskattningen bättre och bättre
desto mindre Δu och Δv är.



Om man delar in den ursprungliga ytan S i delytor,
och använder uppskattningen

$$\text{area}(S_0) \approx \left| \mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0) \right| \Delta u \Delta v$$

för varje delyta kan man

med hjälp av Riemannsummor härleda formeln

$$\text{area}(S) = \iint_D \left| \mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v) \right| dA$$

Ex Om S är grafen $r(x,y) = \langle x, y, f(x,y) \rangle$, $(x,y) \in D$,
så vi att $r_x \times r_y = \langle -f_x, -f_y, 1 \rangle$.

Eftersom $|r_x \times r_y| = \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}$ ger detta formeln från förra veckan:

$$A = \iint_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2} dA.$$

Ex Låt S vara rotationsytan

$$r(u,v) = \langle g(u)\cos v, g(u)\sin v, u \rangle, \quad (u,v) \in D = [a,b] \times [0,2\pi].$$

(Gick inte igenom dessa räkningar på föreläsningen.)

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} \begin{matrix} i & j & k \end{matrix} \\ g'(u)\cos v & g'(u)\sin v & 1 \\ -g(u)\sin v & g(u)\cos v & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \langle -g(u)\cos v, -g(u)\sin v, \underbrace{g'(u)g(u)(\cos^2 v + \sin^2 v)}_{=1} \rangle = g(u)\langle -\cos v, -\sin v, g'(u) \rangle.$$

$$\Rightarrow |r_u \times r_v| = g(u)\sqrt{1+g'(u)^2}$$

Arean blir då

$$A = \iint_D |r_u \times r_v| dA = \int_a^b \int_0^{2\pi} g(u)\sqrt{1+g'(u)^2} dv du =$$
$$= 2\pi \int_a^b g(u)\sqrt{1+g'(u)^2} du.$$

Denna formel finns i avsn. 8.2 där den härleds på annat sätt.