Sammanfattning Föreläsning 17

- **Sats** Om $\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$ är ett vektorfält på $D \subseteq \mathbb{R}^2$, där D är enkelt sammanhängande och
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$
så är $\mathbf{F}$ konservativt på D, dvs $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} f$ för någon funktion f.

  (Tidigare, såg att ekvationen *måste* vara uppfylld för att skall vara konservativt, denna satsen säger att det *räcker)*

Metod för att hitta potential f till konservativt vektorfält

$F = \langle P, Q \rangle$: Vill lösa $\begin{cases} f_x = P & (i) \\ f_y = Q & (ii) \end{cases}$

1. Tar först en lösning f_0 till (i), $f_0 = \int P\, dx$. Allmänna lösningen till (i) är då $f(x,y) = f_0(x,y) + g(y) \quad (*)$.
2. Sätter in lösningen från $(*)$ i (ii) för att bestämma g:
   $Q \underset{(ii)}{=} f_y \underset{(*)}{=} (f_0)_y + g'(y) \Rightarrow \quad g(y) = \int Q - (f_0)_y \, dy.$

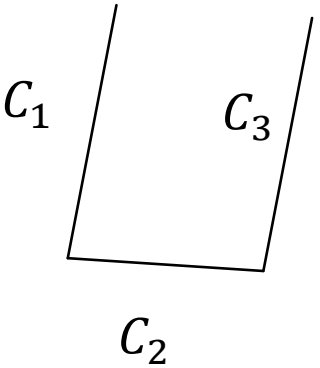
En kurva C är **styckvis glatt** om den kan delas upp i glatta kurvor $C_1, \dots, C_m$ där C_i slutar där C_{i+1} börjar.

Då definierar man

$$\int_C f\, ds = \int_{C_1} f\, ds + \cdots + \int_{C_m} f\, ds$$

och

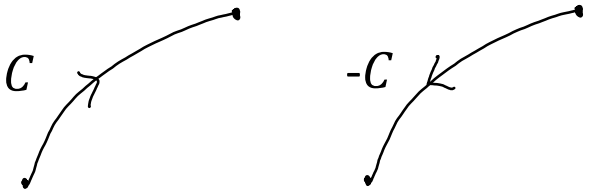
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \cdots + \int_{C_m} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$



För integraler av vektorfält längs C ser man C som en *orienterad kurva,* dvs. den består av punkter <u>och</u> en riktning.

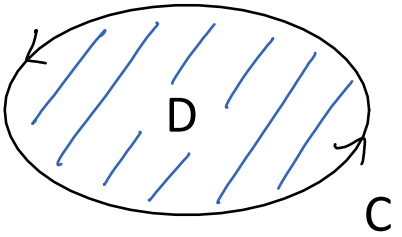
Man definierar kurvan $-C$ som kurvan som består av samma punkter men går i motsatt riktning.

$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$



En enkel sluten kurva C (*som börjar och slutar i samma punkt och inte korsar sig själv)* **begränsar** ett område D, dvs. C är randen till D.

C är **positivt orienterad** om den går moturs kring D (D på vänster sida om man följer C i positiv riktning), annars är den **negativt orienterad.**



Notation

C kurva, parametriseras av $\mathbf{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big),\ a \leq t \leq b$

$\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$ vektorfält

Då betecknar man

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_C P\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t), y(t)\big)y'(t)\, dt$$

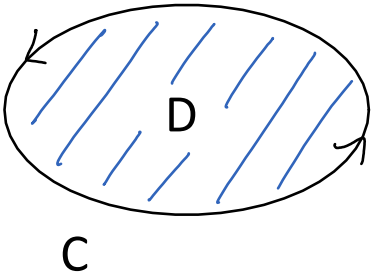
också med

$$\int_C P\, dx + Q\, dy$$

(dvs $dx = x'(t)\, dt$ och $dy = y'(t)\, dt$)

Greens formel: Låt C vara en enkel sluten positivt orienterad kurva som begränsar området D. Då är

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$



Användbart specialfall:

$$\text{area}(D) = \int_C -y\,dx = \int_C x\,dy = \frac{1}{2}\int_C -y\,dx + x\,dy$$

Dugga 3 startar idag kl 13:00

Deadline **fredag 25/10**, kl 18:00

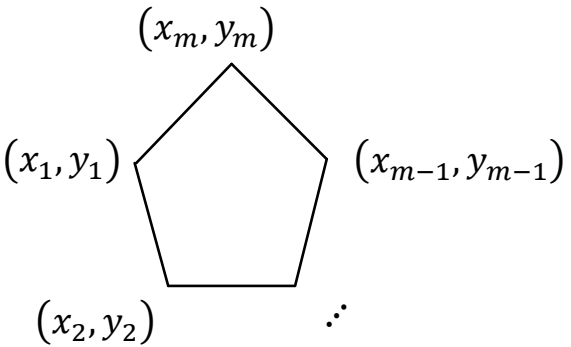
Behöver klara 5 av 6 uppgifter

Exempel på användningar av Greens formel:

a) Planimeter: verktyg som mäter area av områden
b) Bevisa satsen om konservativa vektorfält på enkelt sammanhängande områden (slutet av avsn. 16.4)
c) Formel för area av polygon (nästa slide)

Exempel En <u>polygon</u> är ett område i planet som begränsas av ett antal räta linjer som inte skär varandra.

Om polygonen har hörn i $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$, uppräknade moturs, så ger formeln $A = \frac{1}{2}\int_C -y\,dx + x\,dy$ att polygonens area är



$$\frac{1}{2}\big((x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + \cdots + (x_{m-1}y_m - x_my_{m-1}) + (x_my_1 - x_1y_m)\big)$$

(se övning 16.4.21)

http://www.classtime.com/code/QKRN9

http://www.classtime.com/ Code: QKRN9

Vad parametriserar $\mathbf{r}(\phi, \theta) = \langle \sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi \rangle, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ för en yta?

Vad parametriserar $\mathbf{r}(z, \theta) = \langle z\cos\theta, z\sin\theta, z \rangle, 0 \leq z \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ för en yta?

Vad parametriserar $\mathbf{r}(z, \theta) = \langle \cos\theta, \sin\theta, z \rangle, 0 \leq z \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ för en yta?

- ○ En kon
- ○ En sfär
- ○ En cylinder

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = \langle \sin\phi \cos\theta \,, \sin\phi \sin\theta \,, \cos\phi \,\rangle,$$
$$0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq \; 2\pi$$

Sfäriska koordinater

$$(x, y, z) = \; (\rho \sin\phi \cos\theta \,, \rho \sin\phi \sin\theta \,, \rho \cos\phi)$$

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = \langle \sin\phi \cos\theta \,, \sin\phi \sin\theta \,, \cos\phi \,\rangle,$$
$$0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq \; 2\pi$$

Sfäriska koordinater

$$(x, y, z) = \; (\rho \sin\phi \cos\theta \,, \rho \sin\phi \sin\theta \,, \rho \cos\phi)$$

Så $\mathbf{r}$ parametriserar området i sfäriska koordinater:

$$\rho = 1, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = \langle \sin\phi \cos\theta \,, \sin\phi \sin\theta \,, \cos\phi \,\rangle,$$
$$0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq \ 2\pi$$

Sfäriska koordinater

$$(x, y, z) = \ (\rho \sin\phi \cos\theta \,, \rho \sin\phi \sin\theta \,, \rho \cos\phi)$$

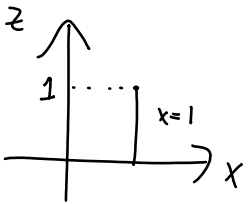
Så $\mathbf{r}$ parametriserar området i sfäriska koordinater:

$\rho = 1, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

Blir en **sfär** (med centrum i origo och radie 1).

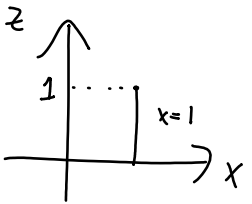
$$\mathbf{r}(z,\theta) = \langle \cos\theta\,, \sin\theta\,, z\rangle,$$
$$0 \le z \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi$$

$\mathbf{r}(z, \theta) = \langle \cos\theta\,, \sin\theta\,, z \rangle,$
$0 \leq z \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

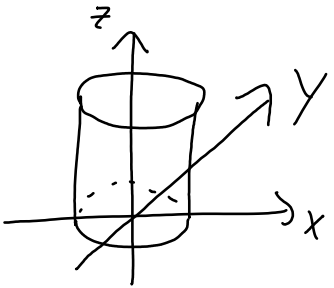


Är en rotationsyta med radien $r = 1$.
Fås alltså genom att ta $x = 1$, $0 \leq z \leq 1$
och rotera kring z-axeln.

$\mathbf{r}(z,\theta) = \langle \cos\theta\,, \sin\theta\,, z\rangle,$
$0 \le z \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi$

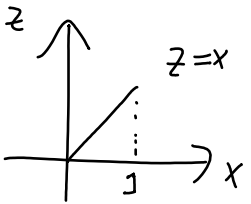


Är en rotationsyta med radien $r = 1$.
Fås alltså genom att ta $x = 1$, $0 \le z \le 1$
och rotera kring z-axeln.
Blir en **cylinder**.



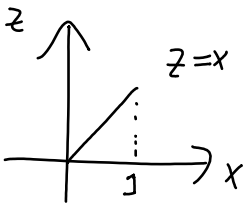
$$\mathbf{r}(z,\theta) = \langle z\cos\theta\,, z\sin\theta\,, z\rangle,$$
$$0 \le z \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi$$

$\mathbf{r}(z,\theta) = \langle z\cos\theta\,, z\sin\theta\,, z\rangle,$
$0 \le z \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi$

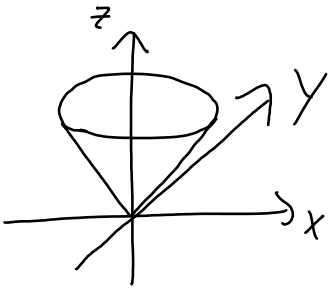


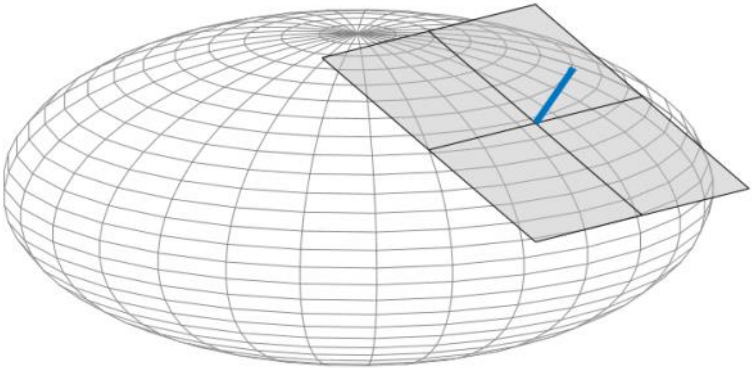
Är en rotationsyta med radien $r = z$.
Fås alltså genom att ta $x = z$, $0 \le z \le 1$
och rotera kring z-axeln.

$\mathbf{r}(z,\theta) = \langle z\cos\theta\,, z\sin\theta\,, z\rangle,$
$0 \le z \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi$



Är en rotationsyta med radien $r = z$.
Fås alltså genom att ta $x = z$, $0 \le z \le 1$
och rotera kring z-axeln.
Blir en **kon**.





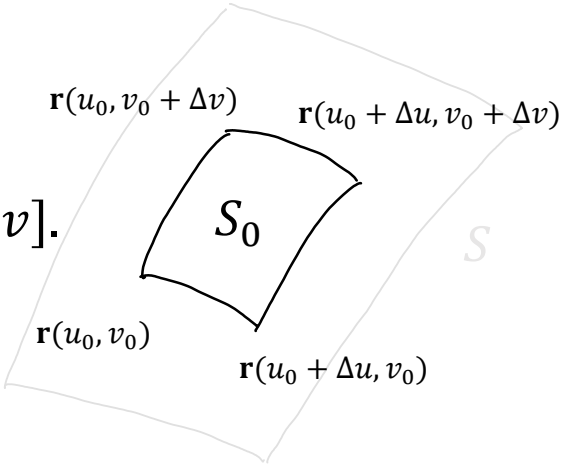
Tangentplan
till ellipsoid
(och planets
normalvektor)

Härledning av formel för arean av parametriserad yta

Antar S yta parametriserad av $\mathbf{r}(u,v), (u,v) \in D$.

Tag $(u_0, v_0) \in D$ och $\Delta u, \Delta v > 0$.

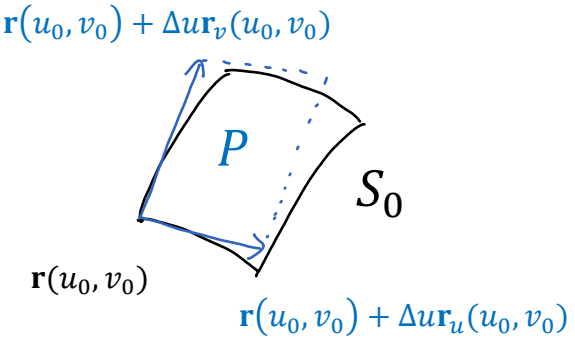
Låt S_0 vara delen av S där
$(u,v) \in [u_0, u_0 + \Delta u] \times [v_0, v_0 + \Delta v]$.



Med hjälp av linearisering följer att

$$\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) \approx \mathbf{r}(u_0, v_0) + \Delta u \mathbf{r}_u(u_0, v_0) \text{ osv.}$$

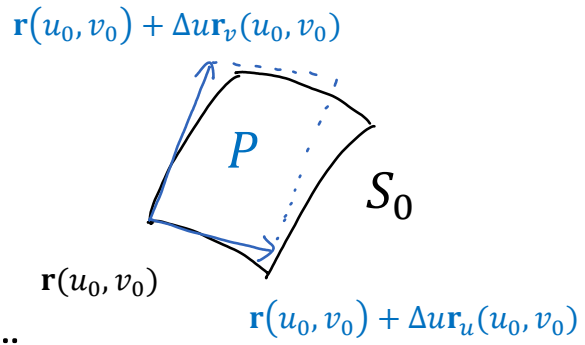
Därför är S_0 nära parallellogrammet P enligt figur.



Med hjälp av linearisering följer att

$\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) \approx \mathbf{r}(u_0, v_0) + \Delta u \mathbf{r}_u(u_0, v_0)$ osv.

Därför är S_0 nära parallellogrammet P enligt figur.



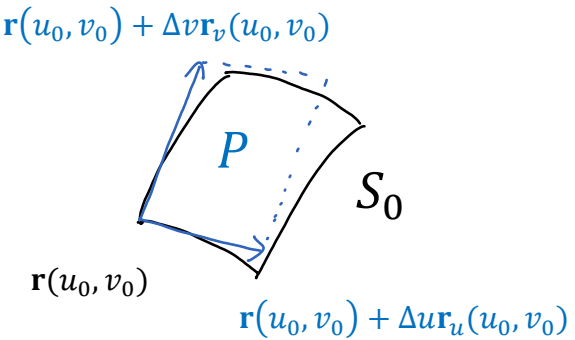
Bör då ha:

$\text{area}(S_0) \approx \text{area}(P)$,

och uppskattningen bättre och bättre desto mindre Δu och Δv är.

Enligt egenskaper för kryssprodukt är

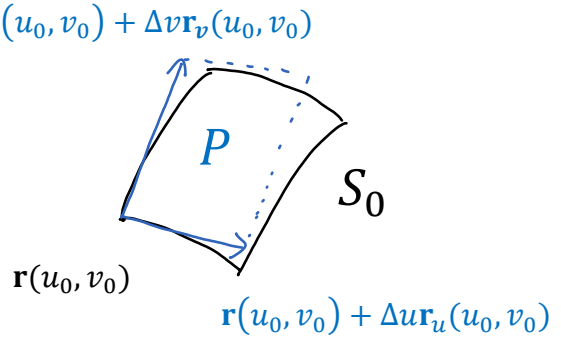
$$\text{area}(P) = \left|\left(\Delta u\ \mathbf{r}_u(u_0, v_0)\right) \times \left(\Delta v\ \mathbf{r}_v(u_0, v_0)\right)\right|$$



Enligt egenskaper för kryssprodukt är

$$\text{area}(P) = \left|\left(\Delta u\ \mathbf{r}_u(u_0, v_0)\right) \times \left(\Delta v\ \mathbf{r}_v(u_0, v_0)\right)\right|$$

$$= \left|\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0)\right| \Delta u \Delta v$$



Enligt egenskaper för kryssprodukt är

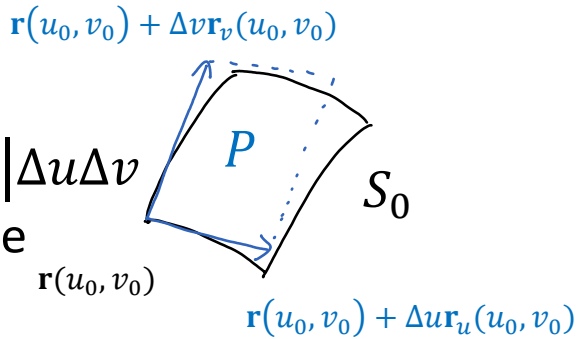
$$\text{area}(P) = \left|\left(\Delta u\ \mathbf{r}_u(u_0, v_0)\right) \times \left(\Delta v\ \mathbf{r}_v(u_0, v_0)\right)\right|$$

$$= \left|\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0)\right| \Delta u \Delta v$$

Alltså blir

$$\text{area}(S_0) \approx \left|\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0)\right| \Delta u \Delta v$$

och uppskattningen bättre och bättre desto mindre Δu och Δv är.



Om man delar in den ursprungliga ytan S i delytor,
och använder uppskattningen
area$(S_0) \approx \left|\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0)\right| \Delta u \Delta v$
för varje delyta kan man
med hjälp av Riemannsummor härleda formeln

$$\text{area}(S) = \iint_D \left|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\right| \, dA$$