

Sammanfattning Föreläsning 18

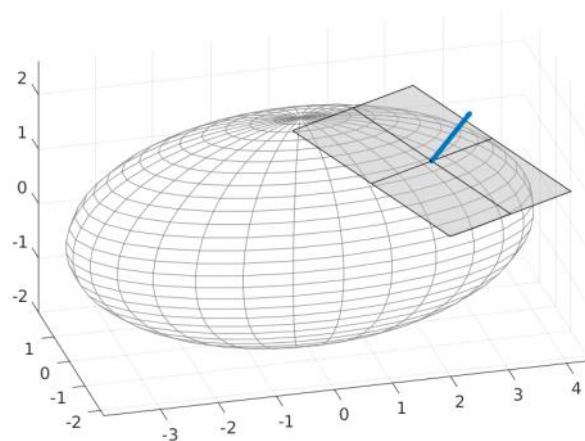
En **parametriserad yta** S ges av en vektorvärd funktion $\mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Dess **tangentplan** i

$\langle a, b, c \rangle = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ ges av

$$\mathbf{n} \cdot \langle x - a, y - b, z - c \rangle = 0,$$

där $\mathbf{n} = \mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0)$.



Area av yta S parametriserad av $\mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$:

$$A = \iint_D |\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)| \, dA.$$

Om S är grafen $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ som kan parametriserats av $\mathbf{r}(x, y) = \langle x, y, f(x, y) \rangle$ så är

$$\mathbf{r}_x(x, y) \times \mathbf{r}_y(x, y) = \langle -f_x(x, y), -f_y(x, y), 1 \rangle$$

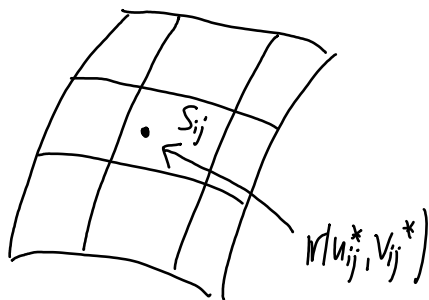
och arean blir

$$\iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dA$$

Ytintegraler av funktioner 16.7

På liknande sätt som för kurvintegraler av funktioner definierar man ytintegraler av funktioner som gränsvärden av Riemannsummar

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(r(u_{ij}^*, v_{ij}^*)) \text{area}(S_{ij})$$



och med liknande härledning som för arean får man

Formel för ytintegral av funktion f på yta S

parametriserad av $r(u,v)$, $(u,v) \in D$

$$\iint_S f(x,y,z) dS = \iint_D f(r(u,v)) |r_u(u,v) \times r_v(u,v)| dA$$

Kort: $dS = |r_u \times r_v| dA$ (formelblad)

(Ger formeln för area från i torsdags när $f=1$)

Om har yta S med densitet $\rho(x,y,z)$ är dess

massa $m = \iint_S \rho(x,y,z) dS$

masscentrum $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}, \frac{M_z}{m} \right)$

där $M_x = \iint_S x \rho(x,y,z) dS$ osv.

Flödesintegraler 16.7

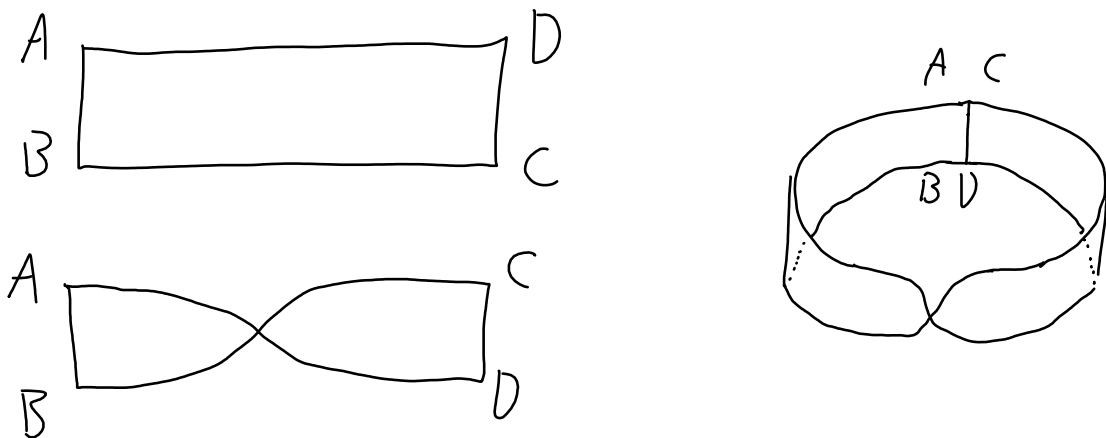
(Ytintegraler av vektorfält fysiskt motiverande)
precis som kurvintegraler av vektorfält

Vill definiera ytintegral av vektorfält $\vec{F}$ över yta S s.a. ger flöde, dvs. Om $\vec{F}$ hastighetsfält för t.ex. en vätska är flödet volymen av vätskan som passerar S (per tidsenhet).

(Behöver först följande begrepp)

Orientering av ytor

Möbiusbandet en speciell yta. Den fås genom att ta en remsa, vrida ett halvt varv och klistra längs kanten.



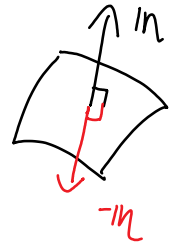
Flödet beror på riktningen vätskan passerar ytan, behöver "fram/baksida" / "in/utsida". Går inte prata om på Möbiusbandet för om startar på ena sidan och går ett varv runt så hamnar man på andra sidan.

Påminnelse Om S yta par. av $r(u,v)$ så är

$$n = \frac{r_u(u,v) \times r_v(u,v)}{|r_u(u,v) \times r_v(u,v)|}$$

en enhetsnormalvektor till tangentplanet till S i $r(u,v)$.

Tangentplanet har två enhetsnormalvektorer $\pm n$ som pekar åt motsatta håll av S .



(På "bra" = orienterade ytor, kan välja en av dessa på ett kontinuerligt sätt)

Def En yta sägs vara orienterad om man för varje (x,y,z) kan välja en enhetsnormalvektor $n(x,y,z)$ s.a. n varierar kontinuerligt på S .
 n kallas då en orientering av S .

Ex a) Möbiusbandet är inte en orienterad yta.

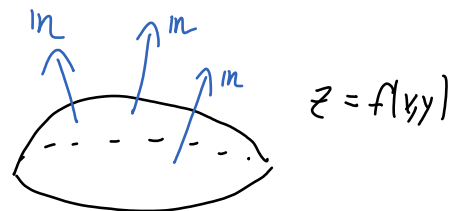
b) Om S glatt orienterad yta parametriserad av $r(u,v)$ så ger
$$n = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}$$
 en orientering av S .

(Måste kräva att vet av annat skal är orienterad.
Möbiusbandet kan parametriseras, men inte så får
välbestämd och kontinuerlig tangentvektor. Kommer få att
olika värden på parametern ger samma punkt, på ytan
men formeln ovan ger olika orienteringar.)

Om S är grafen $z=f(x,y)$ kan den orienteras genom att ta orienteringen som pekar uppåt i z -riktning.

Om S par. med $\mathbf{r}(x,y)=(x,y,f(x,y))$ är den orienteringen

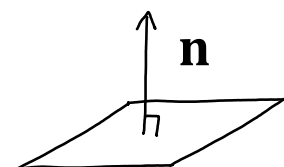
$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y}{|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y|} = \frac{\langle -f_x, -f_y, 1 \rangle}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$



Flöde genom en yta

Antag R rektangel i $\mathbb{R}^3$ med enhetsnormalvektor $\mathbf{n}$.

Vätska rör sig med hastighet $\mathbf{v}$



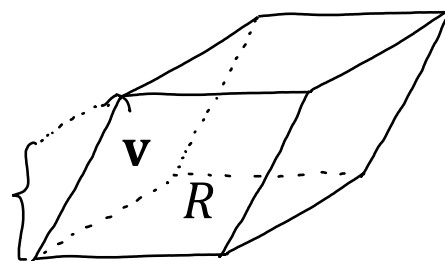
Volymen av vätskan som strömmar genom R
(under en tidsenhet)

= Volymen av parallelepipeden P med
bas R och höjdvektor $\mathbf{v}$

P

Eftersom det som passerar R är
precis det inuti P

$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})$



Volymen av P = höjd $\cdot$ basarea
= $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \cdot \text{area}(R)$

$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})$ = "höjd med tecken", se avsn. 12.3

(räknar volymen med tecken, så negativ om $\mathbf{v}$ och $\mathbf{n}$
pekar åt olika sidor av R)

Om S orienterad yta med orientering $n(x,y,z)$ och $v(x,y,z)$ hastighetsfält härleds man från Riemannsummor där man approximerar S med rektanglar, se avsn. 16.7, att flödet genom S bör vara

$$\iint_S v \cdot n \, dS.$$

Def Ytintegralen av ett vektorfält $\mathbf{F}$ över en yta S med orientering n är

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot n \, dS$$

(HL är en ytintegral av en funktion)

Ytintegralen kallas också flödesintegral (flux integral) och dess värde flödet av $\mathbf{F}$ genom S , eftersom det är det den ger när $\mathbf{F}$ är ett hastighetsfält.

Mer direkt formel S glatt orienterad yta parametriserad av $r(u,v)$, $(u,v) \in D$.

Påminnelse: a) $\iint_S f \, dS = \iint_D f |r_u \times r_v| \, dA.$

b) $n = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}$ ger en orientering av S .

Med den orienteringen blir:

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_D \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| dA = \\ &= \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) dA\end{aligned}$$

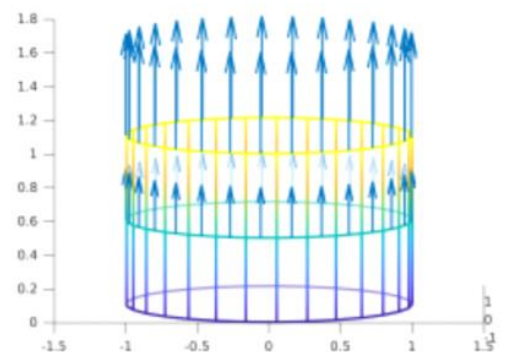
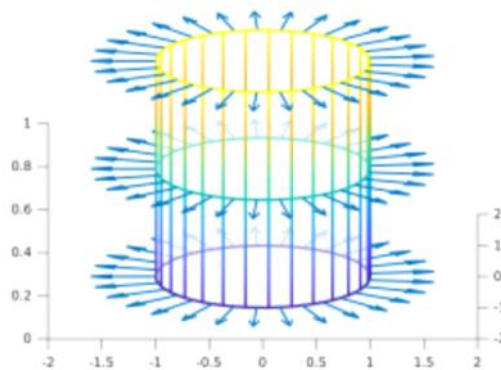
Kort: $d\mathbf{S} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v dA$ (formellblad)

(Om har omvänd orientering gäller formeln med ett minustecken)

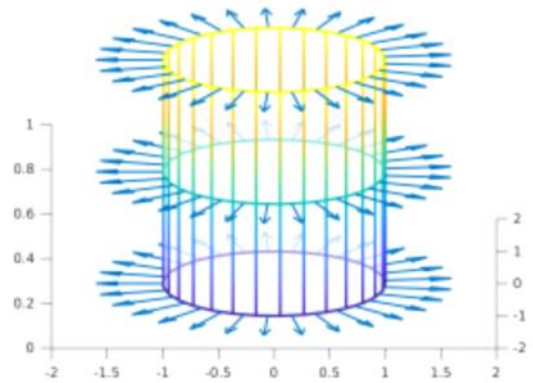
Classtime

Låt $S = \{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1 \}$ med orienteringen som pekar ut ur cylindern och låt $\mathbf{F}$ vara något av vektorfälten $\langle x, y, 0 \rangle$ eller $\langle 0, 0, z \rangle$. Vad har flödet av $\mathbf{F}$ genom S , dvs., $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ för tecken?

- ☐ > 0
- ☐ < 0
- ☐ $= 0$



Om $\mathbf{F}(x, y) = \langle x, y, 0 \rangle$ så
 pekar $\mathbf{F}$ ut ur cylindern, dvs.,
 i samma riktning som
 orienteringen $\mathbf{n}$.



Alltså blir $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} > 0$ så

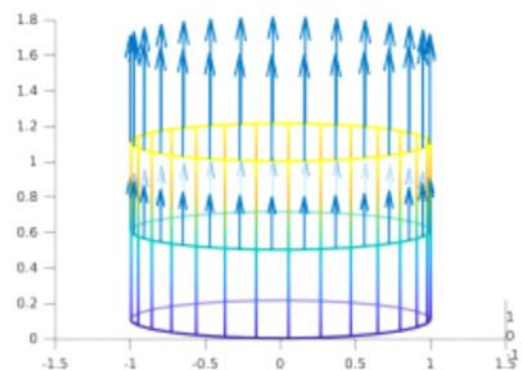
$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS > 0$$

✓ > 0 51%

✗ $= 0$ 38%

✗ < 0 11%

Om $\mathbf{F}(x, y) = \langle 0, 0, z \rangle$ så
 pekar $\mathbf{F}$ rakt upp i z-led,
 medan orienteringen $\mathbf{n}$
 pekar bara i xy -riktning.



Alltså blir $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 0$ så

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

✗ > 0 50%

✓ $= 0$ 47%

✗ < 0 3%

Ex Beräkna flödet av vektorfältet

$F = (zx, zy, 0)$ i pos. x-riktning genom halvcylindern

$$r(u, v) = \langle \cos u, \sin u, v \rangle, \quad (u, v) \in D = [-\pi/2, \pi/2] \times [0, 1].$$

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} \overset{i}{1} & \overset{j}{0} & \overset{k}{0} \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \langle \cos u, \sin u, 0 \rangle$$

Om $-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$ är $\cos u \geq 0$, så pekar i pos. x-riktning,
så har orienteringen vi vill.

$$F(r(u, v)) = F(\cos u, \sin u, v) = \langle v \cos u, v \sin u, 0 \rangle$$

$$\begin{aligned} F(r(u, v)) \cdot (r_u \times r_v) &= \langle v \cos u, v \sin u, 0 \rangle \cdot \langle \cos u, \sin u, 0 \rangle \\ &= v(\cos^2 u + \sin^2 u) = v \end{aligned}$$

så flödet blir

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot dS &= \iint_D F(r(u, v)) \cdot (r_u \times r_v) dA = \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} v du dv = \pi \int_0^1 v dv = \\ &= \pi \left[\frac{v^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$