

Sammanfattning Föreläsning 18

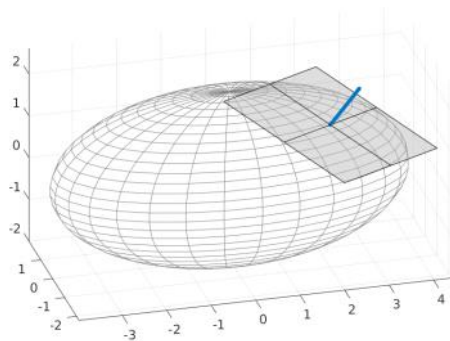
En **parametriserad yta** S ges av en vektorvärd funktion $\mathbf{r}(u, v), (u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Dess **tangentplan** i

$\langle a, b, c \rangle = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ ges av

$$\mathbf{n} \cdot \langle x - a, y - b, z - c \rangle = 0,$$

där $\mathbf{n} = \mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0)$.



Area av yta S parametriserad av $\mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$:

$$A = \iint_D |\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)| dA.$$

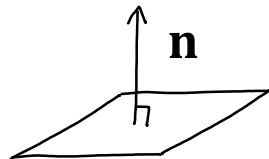
Om S är grafen $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ som kan parametriseras av $\mathbf{r}(x, y) = \langle x, y, f(x, y) \rangle$ så är

$\mathbf{r}_x(x, y) \times \mathbf{r}_y(x, y) = \langle -f_x(x, y), -f_y(x, y), 1 \rangle$
och arean blir

$$\iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dA$$

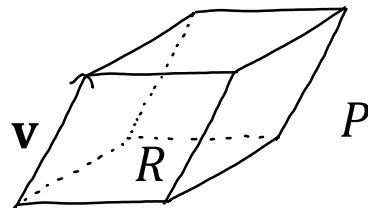
Antag R rektangel i $\mathbb{R}^3$ med enhetsnormalvektor $\mathbf{n}$.

Vätska rör sig med hastighet $\mathbf{v}$



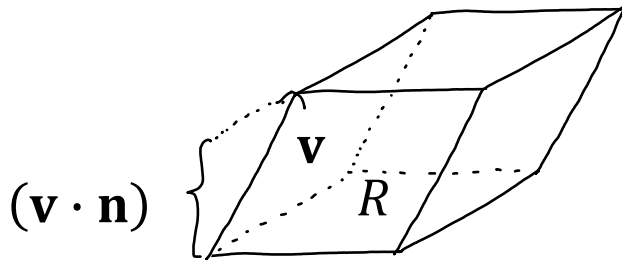
Volymen av vätskan som strömmar genom R
(under en tidsenhet)
= Volymen av parallelepipeden P med
bas R och höjdvektor $\mathbf{v}$

Eftersom det som passerar R är
precis det inuti P



Volymen av $P = \text{höjd} \cdot \text{basarea} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \cdot \text{area}(R)$

$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = \text{"höjd med tecken", se avsn. 12.3}$



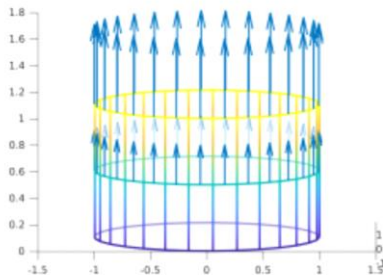
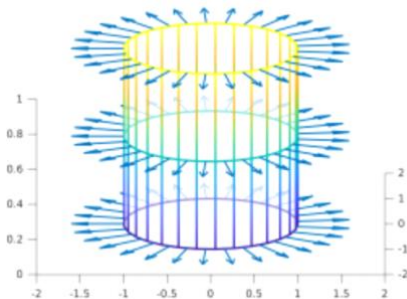
(räknar volymen med tecken, så negativ om $\mathbf{v}$ och $\mathbf{n}$ pekar åt olika sidor av R)

Låt $S = \{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1 \}$ med orienteringen som pekar ut ur cylindern och låt $\mathbf{F}$ vara något av vektorfälten $\langle x, y, 0 \rangle$ eller $\langle 0, 0, z \rangle$. Vad har flödet av $\mathbf{F}$ genom S , dvs., $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ för tecken?

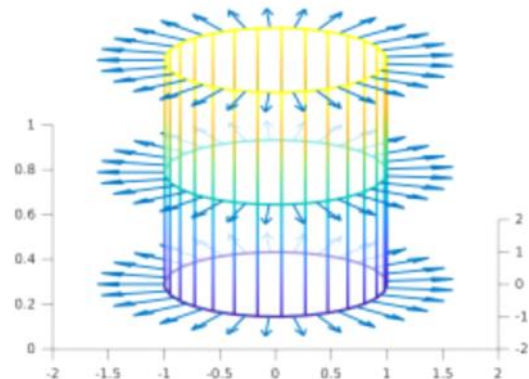
☐ > 0

☐ < 0

☐ $= 0$

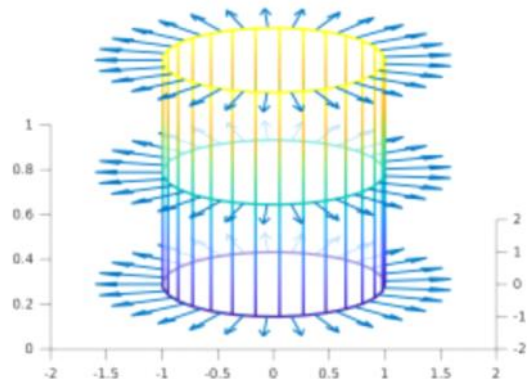


Om $\mathbf{F}(x, y) = \langle x, y, 0 \rangle$

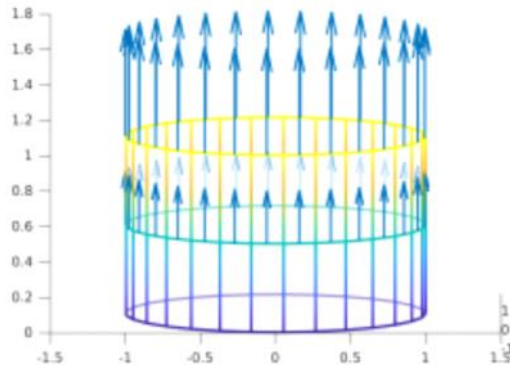


Om $\mathbf{F}(x, y) = \langle x, y, 0 \rangle$ så
pekar $\mathbf{F}$ ut ur cylindern, dvs.,
i samma riktning som
orienteringen $\mathbf{n}$.

Alltså blir $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} > 0$ så
$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS > 0$$



Om $\mathbf{F}(x, y) = \langle 0, 0, z \rangle$



Om $\mathbf{F}(x, y) = \langle 0, 0, z \rangle$ så
pekar $\mathbf{F}$ rakt upp i z -led,
medan orienteringen $\mathbf{n}$
pekar bara i xy -riktning.

Alltså blir $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 0$ så

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$
