

Sammanfattning Föreläsning 19

Ytintegral av funktion $f(x, y, z)$ över yta S parametriserad av $\mathbf{r}(u, v)$, där $(u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)| dA$$

Om har yta S med densitet $\rho(x, y, z)$ så är dess

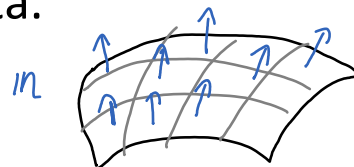
massa $= \iint_S \rho(x, y, z) dS$ och **masscentrum** $= \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}, \frac{M_z}{m} \right)$,

där $M_x = \iint_S x \rho(x, y, z) dS$ osv.

En yta S är *orienterad* om man i varje punkt kan välja en enhetsnormalvektor $\mathbf{n}(x, y, z)$ som varierar kontinuerligt. Då kallas $\mathbf{n}$ en *orientering* av S .

Om S parametriseras av $\mathbf{r}(u, v)$ kan man ta $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$.

Med hjälp av $\mathbf{n}$ kan man då säga att S har "två sidor" (fram-/baksida eller in-/utsida), dvs den sida som pekar i samma riktning som $\mathbf{n}$ och den motsatta.



Ytintegralen av ett vektorfält $\mathbf{F}$ över en orienterad yta S med orientering $\mathbf{n}$ ges av

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

(obs: högerledet är en ytintegral av en funktion)

Om S är parametriserad av $\mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$ och har orientering $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$ så blir

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) dA \quad (d\mathbf{S} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v dA)$$

Om $\mathbf{F}$ är ett hastighetsvektorfält för en vätska så är

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

volymen av vätskan som passerar genom S under en tidsenhet (där volymen är positiv eller negativ beroende på om $\mathbf{F}$ och $\mathbf{n}$ pekar i samma riktning eller inte)

Därför kallas ytintegraler av vektorfält också för **flödesintegraler** och värdet kallas för **flödet** av $\mathbf{F}$ genom S .

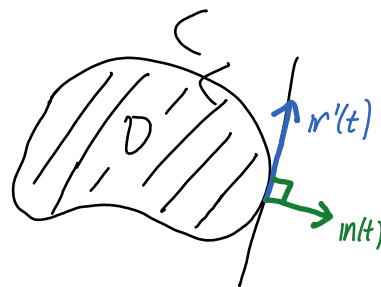
Divergens av vektorfält och flöde genom kurva 16.5

Antag C enkel sluten pos. orienterad kurva som begränsar $D \subseteq \mathbb{R}^2$, och C par. av $r(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$.

Kan visa att $n = \frac{\langle y'(t), -x'(t) \rangle}{|r'(t)|}$

"är en enhetsnormalvektor till tangentlinjen som pekar ut från D .

(n fås genom att rotera r' med -90° och normalisera)



Som för ytor, definierar flödet av $F = \langle P, Q \rangle$ genom C som

$$\int_C F \cdot n \, ds$$

Skall härleda formel för flödet som dubbelintegral över D .

Påminnelse a) Kurvintegral av funktion:

$$\int_C f \, ds \quad \text{där } ds = |r'(t)| \, dt$$

b) Kurvintegral av vektorfält $F = \langle P, Q \rangle$:

$$\int_C F \cdot dr = \int_C P \, dx + Q \, dy, \quad \text{där } dx = x'(t) \, dt, \quad dy = y'(t) \, dt.$$

c) Greens formel: $\int_C P \, dx + Q \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$

Flödet ovan blir då

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \int_a^b \underbrace{\frac{Py' - Qx'}{\cancel{dt}}}_{\vec{F} \cdot \vec{n}} \underbrace{\cancel{dt}}_{ds} \stackrel{(b)}{=} \int_C -Qdx + Pdy =$$

$$\stackrel{(c)}{=} \iint_D \underbrace{\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}}_{\text{viktigt, så ger namn!}} dA$$

Def Divergensen av

i) $\vec{F} = \langle P, Q \rangle$; $\mathbb{R}^2$ är $\text{div } \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$

(Derivatans av första komponenten m.o.p. första variabeln plus
- || - andra - || - andra - || -)

ii) $\vec{F} = \langle P, Q, R \rangle$; $\mathbb{R}^3$ är $\text{div } \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$.

Kan skrivas kort: $\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$

där $\nabla = \langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \rangle$ el. $\nabla = \langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \rangle$

Räkningen ovan kan då skrivas:

Divergenssatsen för kurvor:

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_D \text{div } \vec{F} dA.$$

Divergenssatsen för ytor 16, 9

Def S är en sluten yta om den är randen till ett begränsat område $E \subseteq \mathbb{R}^3$.

Classtime

Är sfären $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ en sluten yta?

Är halvsfären $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ en sluten yta?

Är randen till enhetskuben $\{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ en sluten yta?

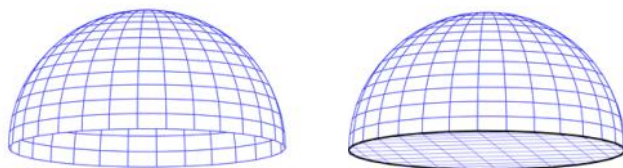
Sfären $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
är randen till klotet $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$
och är alltså en sluten yta.

Klassens svar:

✓ True 91%

✗ False 9%

Halvsfären $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$
är inte randen till något område så är inte en sluten yta



(men t.ex.

$\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ tillsammans med
 $\{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ är randen till halvklotet
 $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$)

Klassens svar:

✗ True 38%

✓ False 62%

Randen till enhetskuben

$$\{ (x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 \}$$

är en sluten yta (enligt definition av sluten yta)

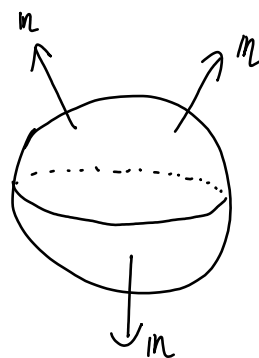
Klassens svar:

✓ True 71%

✗ False 29%

Kommer anta S består av ändligt många glatta ytor, som t.ex. randen till en kub, som består av sex rektanglar.

Def S är positivt orienterad om dess orientering n pekar ut från E .



Divergenssatsen Låt $E \subseteq \mathbb{R}^3$ vara ett begr. område med rand S .
Antag att S är pos. orienterad och består av ändligt många glatta ytor och att $\mathbf{F}$ är ett vektorfält med kont. partiella derivator på E . Då är

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} dV$$

Motsvarar fallet med kurvor eftersom $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$.

Visar detta i ett specialfall, beviset i fallet i boken (avsn. 16.9) bygger på samma idé.

Ex Låt $E = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ och antag att $\vec{F} = \langle 0, 0, R \rangle$.

Då följer divergenssatsen av upprepad integration:

Låt $D = [a, b] \times [c, d]$ s.a. $E = D \times [e, f]$.

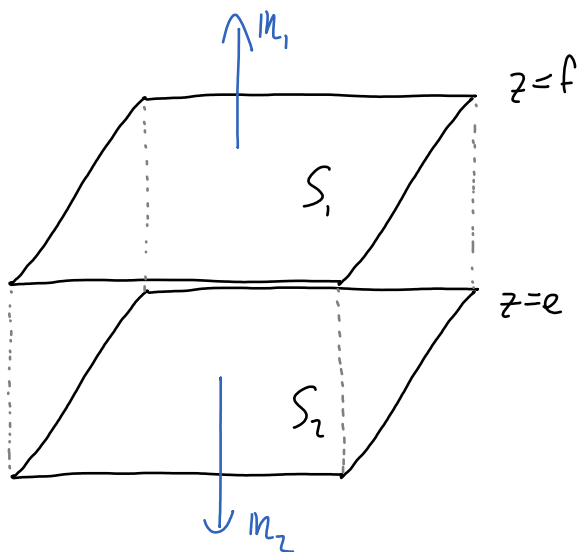
$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial R}{\partial z} \quad \text{s.a.}$$

$$\iiint_E \operatorname{div} \vec{F} dV = \iint_D \int_e^f \frac{\partial R}{\partial z} dz dA = \iint_D [R]_{z=e}^{z=f} dA =$$

$$= \iint_D R(x, y, f) dA - \iint_D R(x, y, e) dA.$$

Vi jämför nu detta med ytintegralerna i divergenssatsen:

Randen S till E består av 6 st. rektanglar:



osv.

S_1 par. av $r, (x, y) = \langle x, y, f \rangle, (x, y) \in D,$

och dess normalvektor är $n_1 = \langle 0, 0, 1 \rangle$ (pekar ut från E)

$$\text{Då blir } \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \underbrace{\langle 0, 0, R(x, y, f) \rangle}_{\vec{F}(r, (x, y))} \cdot \langle 0, 0, 1 \rangle dA$$

$$= \iint_D R(x, y, f) dA, \text{ vilket ger första integralen ovan.}$$

På liknande sätt ger $\iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S}$ andra integralen ovan

(minustecken för $n_2 = \langle 0, 0, -1 \rangle$)

Eftersom $n_3, \dots, n_6$ bara pekar i x-led eller y-led blir dess z-komponent 0, så om $i = 3, \dots, 6$ är

$$\iint_{S_i} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_i} \underbrace{\langle 0, 0, R \rangle \cdot n_i}_{=0} = 0$$

För att sammanfatta:

$$\iiint_E \operatorname{div} \vec{F} dV = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \underbrace{\iint_{S_3} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \dots + \iint_{S_6} \vec{F} \cdot d\vec{S}}_{=0} =$$

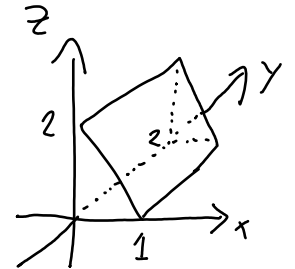
$$= \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S},$$

vilket visar divergenssatsen i detta specialfall.

Ex Beräkna flödet av $F = (z^2, y^2, x^2)$ ut ur området mellan planen $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=2$, $z=0$ och $z=2-2x$.

Området som begränsas av planen är

$$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2-2x\}$$



Om S den positivt orienterade randen till E är flödet ut ur E :

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot dS &= \iiint_E \operatorname{div} F \, dV = \iiint_E 2y \, dV = \\ &= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^{2-x} 2y \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^2 2y(2-2x) \, dy \, dx = \\ &= \int_0^1 (2-2x) [y^2]_0^2 \, dx = 4 [2x - x^2]_0^1 = 4. \end{aligned}$$