

Sammanfattning Föreläsning 19

Ytintegral av funktion $f(x, y, z)$ över yta S
parametriserad av $\mathbf{r}(u, v)$, där $(u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)| dA$$

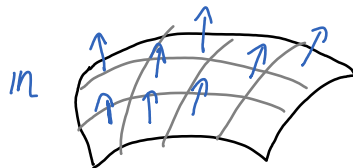
Om har yta S med densitet $\rho(x, y, z)$ så är dess

massa $= \iint_S \rho(x, y, z) dS$ och **masscentrum** $= \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}, \frac{M_z}{m} \right)$,
där $M_x = \iint_S x \rho(x, y, z) dS$ osv.

En yta S är *orienterad* om man i varje punkt kan välja en enhetsnormalvektor $\mathbf{n}(x, y, z)$ som varierar kontinuerligt. Då kallas $\mathbf{n}$ en *orientering* av S .

Om S parametriseras av $\mathbf{r}(u, v)$ kan man ta $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$.

Med hjälp av $\mathbf{n}$ kan man då säga att S har "två sidor" (fram-/baksida eller in-/utsida), dvs den sida som pekar i samma riktning som $\mathbf{n}$ och den motsatta.



Ytintegralen av ett vektorfält $\mathbf{F}$ över en orienterad yta S med orientering $\mathbf{n}$ ges av

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

(obs: högerledet är en ytintegral av en funktion)

Om S är parametriserad av $\mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$ och har orientering $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$ så blir

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \, dA \quad (d\mathbf{S} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \, dA)$$

Om $\mathbf{F}$ är ett hastighetsfält för en vätska så är

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

volymen av vätskan som passerar genom S under en tidsenhet

(där volymen är positiv eller negativ beroende på om $\mathbf{F}$ och $\mathbf{n}$ pekar i samma riktning eller inte)

Därför kallas ytintegraler av vektorfält också för

flödesintegraler och värdet kallas för **flödet** av $\mathbf{F}$ genom S .

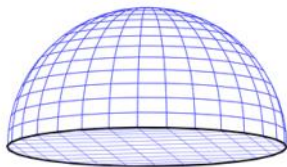
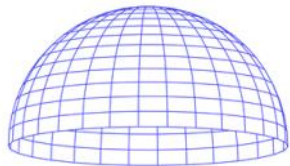
Är sfären $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ en sluten yta?

Är halvsfären $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ en sluten yta?

Är randen till enhetskuben $\{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ en sluten yta?

Sfären $\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$
är randen till klotet $\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \}$
och är alltså en sluten yta.

Halvsfären $\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0 \}$
är inte randen till något område så är inte en sluten yta



(men t.ex.

$\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0 \}$ tillsammans
med $\{ (x, y, 0) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}$ är randen till halvklotet
 $\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0 \}$)

Randen till enhetskuben

$$\{ (x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 \}$$

är en sluten yta (enligt definition av sluten yta)