

Sammanfattning Föreläsning 20

Divergens av ett vektorfält

i) $\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$ i $\mathbb{R}^2$:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

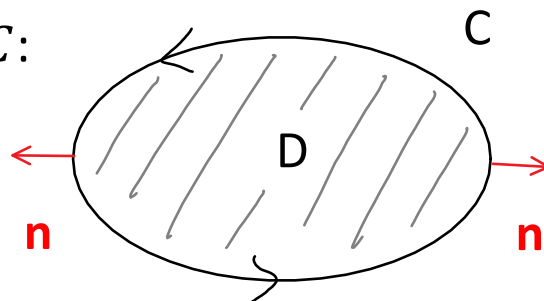
ii) $\mathbf{F} = \langle P, Q, R \rangle$ i $\mathbb{R}^3$:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Kortare: $\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \mathbf{F}$, där $\nabla = \langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \rangle$ eller $\nabla = \langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \rangle$.

Låt C vara en enkel sluten kurva som begränsas av ett område $D \subseteq \mathbb{R}^2$ och låt $\mathbf{n}$ vara en enhetsnormalvektor till tangentlinjen till C som pekar ut från D . Då är flödet av ett vektorfält $\mathbf{F}$ ut genom C :

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds$$



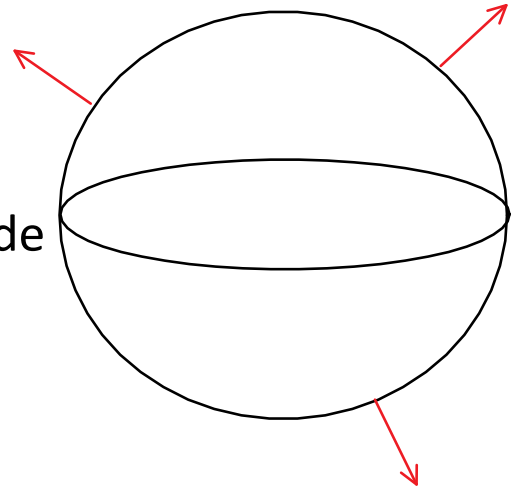
Divergenssatsen för kurvor

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \, dA$$

Om S är randen till ett område E så säger man att S är en *sluten yta*. S är *positivt orienterad* om dess orientering pekar ut från E

Divergenssatsen

Låt S vara den positivt orienterade randen till ett område $E \subseteq \mathbb{R}^3$ och $\mathbf{F}$ ett vektorfält på E .



Då är

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV$$

Innebörd av divergens av ett vektorfält

Om $\mathbf{F}$ är ett hastighetsfält för en vätska och $E \subseteq \mathbb{R}^3$ med rand S , så följer av divergenssatsen att

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{det som produceras} \\ \text{eller konsumeras i } E \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{flödet ut} \\ \text{ur } E \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{flödet} \\ \text{genom } S \end{array} \right\}$$
$$= \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV,$$

dvs. $\operatorname{div} \mathbf{F}$ är en "densitet" för hur mycket vätska som produceras (om $\operatorname{div} \mathbf{F}$ är positiv) eller konsumeras (om $\operatorname{div} \mathbf{F}$ är negativ).

Om $\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) > 0$ blir HL positivt för allt tillräckligt små områden E kring (x, y, z) och då måste vätska produceras kring (x, y, z) . Säger då att (x, y, z) är en **källa** (source).

Om $\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) < 0$ måste istället vätska konsumeras kring (x, y, z) och man säger då att (x, y, z) är en **sänka** (sink).

Om $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ överallt säger man att $\mathbf{F}$ är **källfritt** (incompressible), vilket innebär att genom varje område strömmar lika mycket in som ut.

Rotationen av ett vektorfält 16.5

Def Rotationen (curl) av ett vektorfält $\vec{F} = (P, Q, R)$ i $\mathbb{R}^3$ är

$$\text{rot } \vec{F} = \left\langle \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\rangle$$

Formeln kan sammanfattas:

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

(Bara för vektorfält i tre dimensioner)

Rotation används bl. a. för att formulera två av Maxwells lagar i elektromagnetism.

Om f har kont. part. andraderivator och $\vec{F} = \nabla f$, så blir

$$\text{rot } \nabla f = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \dots \right\rangle =$$

$= \langle 0, 0, 0 \rangle$ enligt Clairauts sats.

Sats Om $\mathbf{F}$ vektorfält på $\mathbb{R}^3$ vars komponenter har kont. partiella derivator och

$$\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

så är $\mathbf{F}$ konservativt, dvs. $\mathbf{F} = \nabla f$ för någon funktion f .

(Gäller mer allmänt på områden som är enkelt sammanhängande, dvs "utan hål", men går inte in på hur detta definieras i $\mathbb{R}^3$.
Mer komplicerat än i $\mathbb{R}^2$.)

Classtime

Är vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle 0, x, y \rangle$ konservativt?

$$\begin{aligned} \text{rot } \langle 0, x, y \rangle &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & x & y \end{vmatrix} = \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial y} y - \frac{\partial}{\partial z} x, -\frac{\partial}{\partial x} y + \frac{\partial}{\partial z} 0, \frac{\partial}{\partial x} x - \frac{\partial}{\partial y} 0 \right\rangle = \\ &= \langle 1, 0, 1 \rangle \end{aligned}$$

Så är **inte** konservativt.

Klassens svar:

✗ True 52%

✓ False 48%

Kan använda liknande metod som i $\mathbb{R}^2$ för att hitta potential:

Ex Vektorfältet $F = \langle z, 2y, x+2z \rangle$ är konservativt.
Bestäm en potential.

$$\text{Vill lösa } \begin{cases} f_x = z & (i) \\ f_y = 2y & (ii) \\ f_z = x+2z & (iii) \end{cases}$$

En lösning till (i) är $f_0 = xz$,
allmänna lösningen är $f(x, y, z) = xz + g(y, z)$ (*)

Sätter in i (ii):

$$2y \stackrel{(iii)}{=} f_y \stackrel{(*)}{=} \frac{\partial}{\partial y} (xz + g(y, z)) = g_y(y, z)$$

En lösn: $g_0 = y^2$, allmänna lösn: $g = g_0 + h(z) = y^2 + h(z)$.

$$\Rightarrow f(x, y, z) = xz + g(y, z) = xz + y^2 + h(z) \quad (**)$$

Sätter in i (iii):

$$x+2z \stackrel{(iii)}{=} f_z \stackrel{(**)}{=} \frac{\partial}{\partial z} (xz + y^2 + h(z)) = x + h'(z)$$

$$\Rightarrow h'(z) = 2z \Rightarrow h(z) = z^2 + C$$

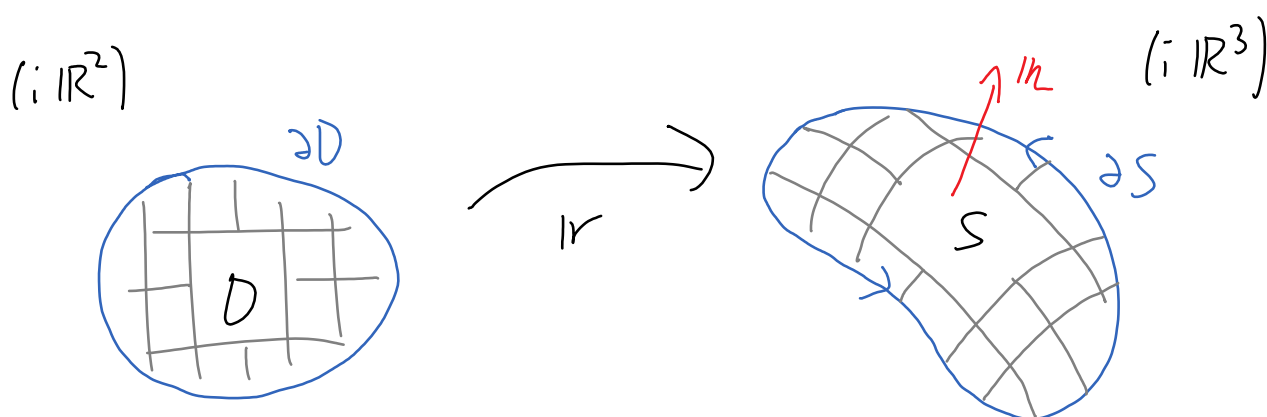
Så $f = xz + y^2 + z^2 + C$ är en potential till F . (Kontrollera!)

Stokes sats 16.8

Låt S vara en yta i $\mathbb{R}^3$ par. av (u,v) , $(u,v) \in D$.
Randen ∂S till ytan S är bilden av randen ∂D till D .

En orientering av S ger en orientering av ∂S genom att man går moturs längs ∂S runt in.

Om ∂S har den orienteringen säger man att den är positivt orienterad.



Stokes sats Låt S vara en orienterad yta och antag att dess rand $C = \partial S$ är en enkel sluten positivt orienterad kurva. Låt F vara ett vektorfält med kontinuerliga partiella derivator. Då är

$$\int_C F \cdot dr = \iint_S \operatorname{rot} F \cdot dS.$$

(Gick inte igenom argumenten för detta på föreläsningen)

Om $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är ett område med rand C och $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ ett vektorfält på D kan man också se det som ett vektorfält $\vec{F} = \langle P, Q, 0 \rangle = P\vec{i} + Q\vec{j}$ på $\mathbb{R}^3$.

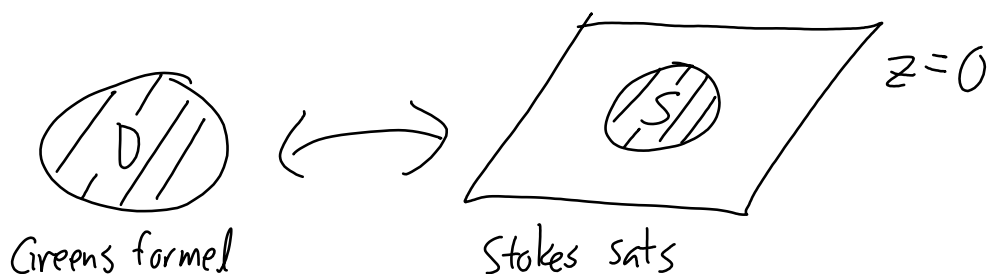
$$\text{Då blir } \text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x,y) & Q(x,y) & 0 \end{vmatrix} = \langle 0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \rangle.$$

Greens formel säger att
$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C P dx + Q dy = \iint_D \underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)}_{=\text{rot } \vec{F} \cdot \vec{k}} dA$$

Om man låter $S = \{(x,y,0) \mid (x,y) \in D\}$ så ger $\vec{n} = \vec{k}$ en orientering av S ,

s.a.
$$\iint_D \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{k} = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Greens formel för D blir då Stokes sats för S .



Anm: Man ser på liknande sätt som att rot $\nabla f = 0$ också att $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$, dvs. $G = \operatorname{rot} F$ är källfritt.

Omvänt gäller t.ex. på $\mathbb{R}^3$ eller andra "lämpliga" områden $E \subseteq \mathbb{R}^3$ att om G är källfritt, dvs. om $\operatorname{div} G = 0$, så finns ett vektorfält F s.a. $G = \operatorname{rot} F$.

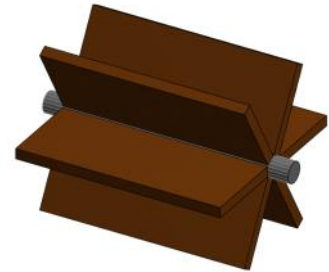
Inom fysik är det ett vanligt krav att vektorfält är källfria, vilket då ger relevanta exempel när Stokes sats är tillämpbar.

Geometrisk tolkning av rot $\mathbf{F}$:

Antag att $\mathbf{F}$ är ett hastighetsfält för en vätska.

Placera ut ett skovelhjul med centrum i en punkt (x, y, z)

Hastigheten av hur skovelhjulet snurrar beror på i vilken riktning man placerar rotationsaxeln.



Hjulet snurrar som snabbast om rotationsaxeln är rot $\mathbf{F}$.

Antag att hjulet roterar kring

- en axel med riktningsvektor $\mathbf{n}$ (blå)

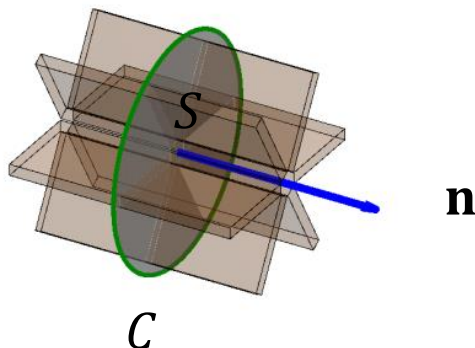
och att det följer

- en cirkel C (grön)

som begränsar

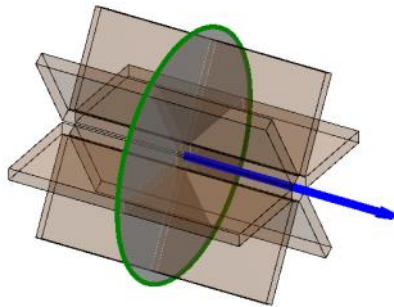
- en yta S (grå)

Då kan man ta $\mathbf{n}$ som normalvektor till S .



Hur snabbt hjulet roterar är proportionellt mot arbetet av $\mathbf{F}$ längs C :

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \{ \text{Stokes sats} \} \\ &= \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS\end{aligned}$$



Hastigheten av hjulet är alltså proportionell mot

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

Om man delar dubbelintegralen med arean av S och sedan låter radien gå mot 0 så går detta mot $\text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$. Detta blir som störst om $\mathbf{n}$ och $\text{rot } \mathbf{F}$ pekar i samma riktning, dvs:

Hjulet snurrar som snabbast om rotationsaxeln är $\text{rot } \mathbf{F}$.

(när storleken på hjulet går mot 0)

Anm: Stokes sats kan användas för att visa satsen från förra föreläsningen, att ett vektorfält på $\mathbb{R}^3$ är konservativt precis om dess rotation är noll, se avsn. 16.8.