

Sammanfattning Föreläsning 20

Divergens av ett vektorfält

i) $\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$ i $\mathbb{R}^2$:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

ii) $\mathbf{F} = \langle P, Q, R \rangle$ i $\mathbb{R}^3$:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

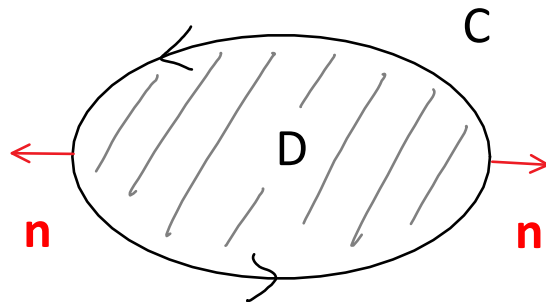
Kortare: $\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$, där $\nabla = \langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \rangle$ eller $\nabla = \langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \rangle$.

Låt C vara en enkel sluten kurva som begränsas av ett område $D \subseteq \mathbb{R}^2$ och låt $\mathbf{n}$ vara en enhetsnormalvektor till tangentlinjen till C som pekar ut från D . Då är flödet av ett vektorfält $\mathbf{F}$ ut genom C :

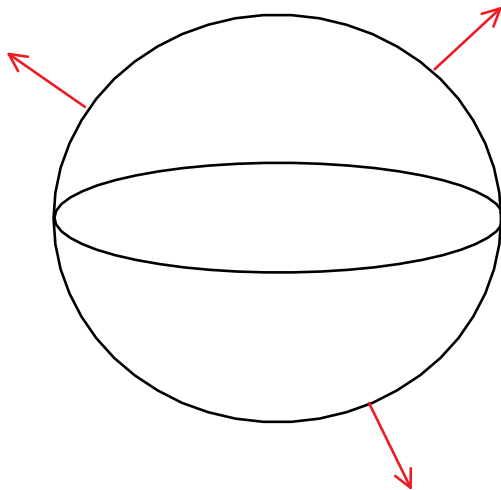
$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds$$

Divergenssatsen för kurvor

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \, dA$$



Om S är randen till ett område E så säger man att S är en *sluten yta*. S är *positivt orienterad* om dess orientering pekar ut från E



Divergenssatsen

Låt S vara den positivt orienterade randen till ett område $E \subseteq \mathbb{R}^3$ och $\mathbf{F}$ ett vektorfält på E .

Då är

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV$$

Innebörd av divergens av ett vektorfält

Om $\mathbf{F}$ är ett hastighetsfält för en vätska och $E \subseteq \mathbb{R}^3$ med rand S , så följer av divergenssatsen att

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{det som produceras} \\ \text{eller konsumeras i } E \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} \text{flödet ut} \\ \text{ur } E \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{flödet} \\ \text{genom } S \end{array} \right\} \\ &= \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} dV, \end{aligned}$$

dvs. $\operatorname{div} \mathbf{F}$ är en "densitet" för hur mycket vätska som produceras (om $\operatorname{div} \mathbf{F}$ är positiv) eller konsumeras (om $\operatorname{div} \mathbf{F}$ är negativ).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{det som produceras} \\ \text{eller konsumeras i } E \end{array} \right\} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV$$

Om $\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) > 0$ blir HL positivt för allt tillräckligt små områden E kring (x, y, z) och då måste vätska produceras kring (x, y, z) . Säger då att (x, y, z) är en **källa** (source).

Om $\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) < 0$ måste istället vätska konsumeras kring (x, y, z) och man säger då att (x, y, z) är en **sänka** (sink).

Om $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ överallt säger man att $\mathbf{F}$ är **källfritt** (incompressible), vilket innebär att genom varje område strömmar lika mycket in som ut.

Är vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle 0, x, y \rangle$ konservativt?

$$\begin{aligned} \text{rot } \langle 0, x, y \rangle &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & x & y \end{vmatrix} = \\ &\left\langle \frac{\partial}{\partial y} y - \frac{\partial}{\partial z} x, -\frac{\partial}{\partial x} y + \frac{\partial}{\partial z} 0, \frac{\partial}{\partial x} x - \frac{\partial}{\partial y} 0 \right\rangle = \\ &\langle 1, 0, 1 \rangle \end{aligned}$$

Så är **inte** konservativt.

$$\text{rot } \langle 0, x, y \rangle = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & x & y \end{vmatrix} =$$

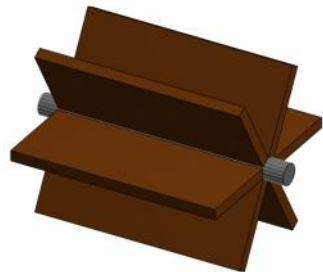
Geometrisk tolkning av rot $\mathbf{F}$:

Antag att $\mathbf{F}$ är ett hastighetsfält för en vätska.

Placera ut ett skovelhjul med centrum i en punkt (x, y, z)

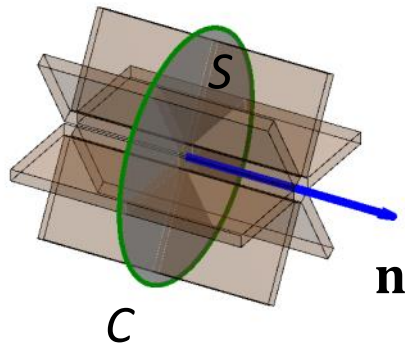
Hastigheten av hur skovelhjulet snurrar beror på i vilken riktning man placerar rotationsaxeln.

Hjulet snurrar som snabbast om rotationsaxeln är rot $\mathbf{F}$.



Antag att hjulet roterar
kring

- en axel med
riktningsvektor $\mathbf{n}$ (blå)
- och att det följer
- en cirkel C (grön)
- som begränsar
- en yta S (grå)



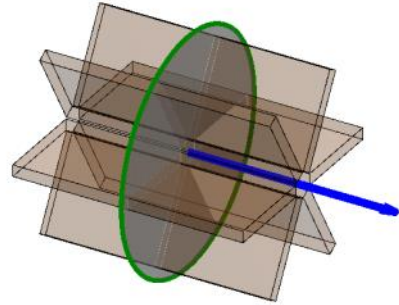
Då kan man ta $\mathbf{n}$ som
normalvektor till S .

Hur snabbt hjulet roterar
är proportionellt mot
arbetet av $\mathbf{F}$ längs C :

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \{ \text{Stokes sats} \}$$

$$= \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

$$= \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$



Hastigheten av hjulet är alltså
proportionell mot

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

Om man delar dubbelintegralen
med arean av S och sedan låter radien
gå mot 0 så går detta mot $(\text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})(x, y, z)$. Detta blir
som störst om $\mathbf{n}$ och $\text{rot } \mathbf{F}$ pekar i samma riktning, dvs:

Hjulet snurrar som snabbast om rotationsaxeln är $\text{rot } \mathbf{F}$.
(när storleken på hjulet går mot 0)

