

Sammanfattning Föreläsning 21

Rotationen (curl) av ett vektorfält $\mathbf{F} = \langle P, Q, R \rangle$ är

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left\langle \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, -\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\rangle.$$

$$\operatorname{rot} \nabla f = 0.$$

Omvänt gäller:

Sats Om $\mathbf{F}$ är ett vektorfält på $\mathbb{R}^3$ och

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

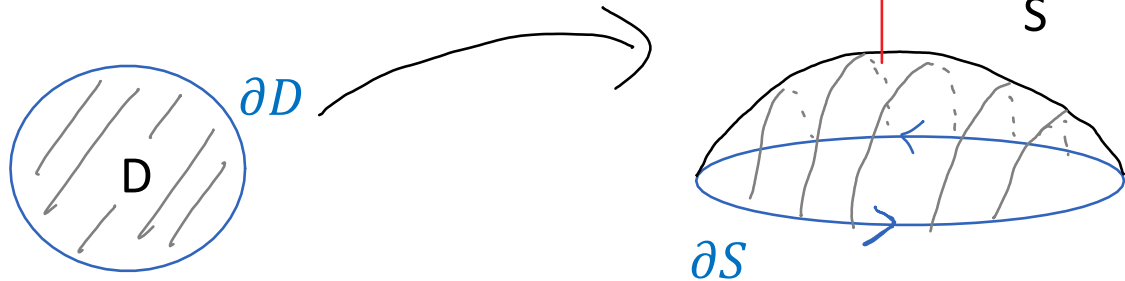
så är $\mathbf{F}$ konservativt, dvs.,

$$\mathbf{F} = \nabla f$$

för någon funktion f .

Om S är en yta parametriserad av $\mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$ så är dess *rand* ∂S bilden av randen ∂D av D .

Randen är *positivt orienterad* om den går moturs runt orienteringen $\mathbf{n}$ av S .

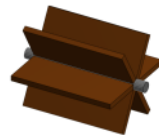


Stokes sats S orienterad yta med positivt orienterad rand $C = \partial S$. Då är

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

- Motsvarar Greens formel för $D \subseteq \mathbb{R}^2$.
- Ger geometrisk tolkning av $\operatorname{rot} \mathbf{F}$:

Om placerar ett (oändligt litet) skovelhjul i (x, y, z) , så snurrar hjulet som snabbast om rotationsaxeln är $(\operatorname{rot} \mathbf{F})(x, y, z)$



Kommentarer inför tentan

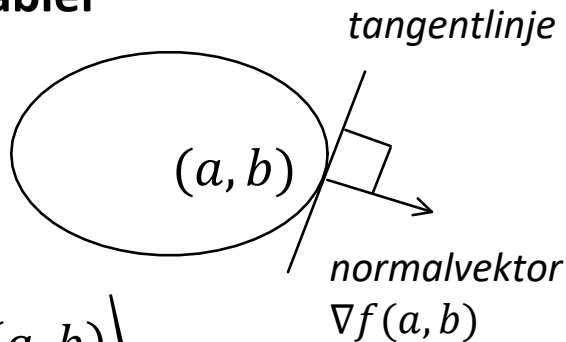
- Listan med *kursmål* på hemsidan specificerar vad ni förväntas kunna och vad tentan kommer testa på.
- Uppgifterna i *övningsprogrammet* testar på *alla* dessa målen.
- Duggorna i Möbius testar på många, men *långt från alla* målen.
- En del gamla tentor innehåller uppgifter om krökningsradie, det ingår inte i kursen i år.
- Kolla vad som finns med på formelbladet.

Repetition 1

Reellvärda funktioner av två variabler

$f(x, y)$ funktion

$f(x, y) = k$
nivåkurva



Gradient $\nabla f(a, b) = \langle f_x(a, b), f_y(a, b) \rangle$

Tangentlinje till nivåkurvan

$$\nabla f(a, b) \cdot \langle x - a, y - b \rangle = 0$$

Riktningsderivata i riktning $\mathbf{u}$ ($|\mathbf{u}| = 1$):

$$D_{\mathbf{u}}f(a, b) = \nabla f(a, b) \cdot \mathbf{u}$$

Riktning där **växer som mest**

$$\mathbf{u} = \frac{\nabla f(a, b)}{|\nabla f(a, b)|}$$

(om $\nabla f(a, b) \neq 0$)

Har motsvarigheter i tre variabler, $f(x, y, z)$ funktion

Gradient $\nabla f(a, b, c) = \langle f_x(a, b, c), f_y(a, b, c), f_z(a, b, c) \rangle$

$\{ (x, y, z) \mid f(x, y, z) = k \}$, **nivåyta**

Tangentplan till nivåytan i (a, b, c)

$$\nabla f(a, b, c) \cdot \langle x - a, y - b, z - c \rangle = 0$$

Riktningsderivata i riktning $\mathbf{u}$ ($|\mathbf{u}| = 1$):

$$D_{\mathbf{u}}f(a, b, c) = \nabla f(a, b, c) \cdot \mathbf{u}$$

$f(x, y)$ kan visualiseras med *grafen* $z = f(x, y)$.

Tangentplan till grafen av $f(x, y)$ i (a, b)

$$z = \underbrace{f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)}_{=L(x,y)}$$

z -värdet $L(x, y)$ kallas **lineariseringen**

om f deriverbar är det en bra approximation av f nära (a, b) .

Grafen $z = f(x, y)$ är en nivåyta $F(x, y, z) = 0$ för $F(x, y, z) = z - f(x, y)$
tangentplanet till grafen av f = tangentplanet till nivåytan av F

Kedjeregeln i två variabel (enklaste varianten)

Om $z = f(x, y)$ och $x = g(t)$ och $y = h(t)$ är deriverbara är

$$\frac{d}{dt}f(g(t), h(t)) = f_x(g(t), h(t))g'(t) + f_y(g(t), h(t))h'(t)$$

alt:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Gränsvärden

$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$ om " *$f(x,y)$ hur nära L som helst så länge (x,y) är tillräckligt nära (a,b)* "

Strategier för att beräkna gränsvärden:

- Om funktion är sammansättning av elementära funktioner och *är definierad* (dvs. delar inte med 0 eller liknande), så är den kontinuerlig, och kan därför sätta in $(x,y) = (a,b)$

Exempel $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \sin\left(\frac{\pi x^2}{y}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

Strategier för att beräkna gränsvärden (forts)

- Förkorta/förenkla så hamnar i förra fallet.

Tenta 2017-10-23 2a)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2}$$

Strategier för att beräkna gränsvärden (forts)

- Förkorta/förenkla så hamnar i förra fallet.

Tenta 2017-10-23 2a)

$$\begin{aligned} & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 + y^2) (\sqrt{x^2 + y^2 + 4} + 2)}{(\sqrt{x^2 + y^2 + 4})^2 - 2^2} \end{aligned}$$

Strategier för att beräkna gränsvärden (forts)

- Förkorta/förenkla så hamnar i förra fallet.

Tenta 2017-10-23 2a)

$$\begin{aligned} & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 + y^2) (\sqrt{x^2 + y^2 + 4} + 2)}{(\sqrt{x^2 + y^2 + 4})^2 - 2^2} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 + y^2) (\sqrt{x^2 + y^2 + 4} + 2)}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Strategier för att beräkna gränsvärden (forts)

- Förkorta/förenkla så hamnar i förra fallet.

Tenta 2017-10-23 2a)

$$\begin{aligned}& \frac{x^2 + y^2}{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2} \\&= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 + y^2) (\sqrt{x^2 + y^2 + 4} + 2)}{(\sqrt{x^2 + y^2 + 4})^2 - 2^2} \\&= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 + y^2) (\sqrt{x^2 + y^2 + 4} + 2)}{x^2 + y^2} \\&= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2 + 4} + 2 = \sqrt{4} + 2 = 4\end{aligned}$$

Strategier för att beräkna gränsvärden (forts)

- Försök skriva det som en sammansättning med en funktion av en variabel.

Exempel $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2+y^4)}{x^2+y^4}$

Strategier för att beräkna gränsvärden (forts)

- Försök skriva det som en sammansättning med en funktion av en variabel.

Exempel $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2+y^4)}{x^2+y^4}$

$$\frac{\sin(x^2+y^4)}{x^2+y^4} = h(f(x,y)) \text{ där } h(t) = \frac{\sin(t)}{t} \text{ och } f(x,y) = x^2 + y^4$$

Strategier för att beräkna gränsvärden (forts)

- Försök skriva det som en sammansättning med en funktion av en variabel.

Exempel $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2+y^4)}{x^2+y^4}$

$$\frac{\sin(x^2+y^4)}{x^2+y^4} = h(f(x,y)) \text{ där } h(t) = \frac{\sin(t)}{t} \text{ och } f(x,y) = x^2 + y^4$$

Eftersom $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$ och $\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 1$
(standardgränsv. alt. l'Hospital, alt def. av derivata för $\sin t$ i $t = 0$)

$$\text{så är } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2+y^4)}{x^2+y^4} = 1.$$

Strategier för att beräkna gränsvärden (forts)

- *Instängningsregeln*: Om

$$f(x, y) \leq g(x, y) \leq h(x, y)$$

och

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} h(x, y)$$

så är

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y) = L$$