

Sammanfattning Föreläsning 21

Rotationen (curl) av ett vektorfält $\mathbf{F} = \langle P, Q, R \rangle$ är

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left\langle \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, -\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\rangle.$$

$$\text{rot } \nabla f = 0.$$

Omvänt gäller:

Sats Om $\mathbf{F}$ är ett vektorfält på $\mathbb{R}^3$ och

$$\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

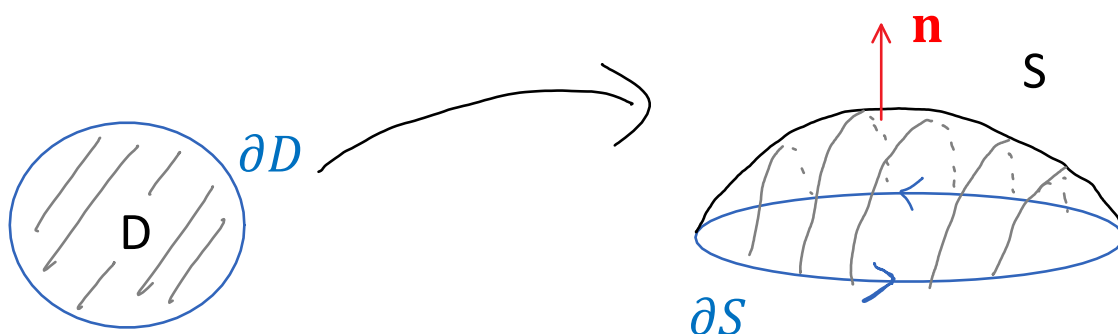
så är $\mathbf{F}$ konservativt, dvs.,

$$\mathbf{F} = \nabla f$$

för någon funktion f .

Om S är en yta parametriserad av $\mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$ så är dess *rand* ∂S bilden av randen ∂D av D .

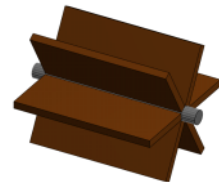
Randen är *positivt orienterad* om den går moturs runt orienteringen $\mathbf{n}$ av S .



Stokes sats S orienterad yta med positivt orienterad rand $C = \partial S$. Då är

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

- Motsvarar Greens formel för $D \subseteq \mathbb{R}^2$.
- Ger geometrisk tolkning av $\operatorname{rot} \mathbf{F}$:
Om placerar ett (oändligt litet) skovelhjul i (x, y, z) , så snurrar hjulet som snabbast om rotationsaxeln är $(\operatorname{rot} \mathbf{F})(x, y, z)$



Kommentarer inför tentan

- Listan med *kursmål* på hemsidan specificerar vad ni förväntas kunna och vad tentan kommer testa på.
- Uppgifterna i *övningsprogrammet* testar på *alla* dessa målen.
- Duggorna i Möbius testar på många, men *långt från alla* målen.
- En del gamla tentor innehåller uppgifter om krökningsradie, det ingår inte i kursen i år.
- Kolla vad som finns med på formelbladet.

Stokes sats (forts.)

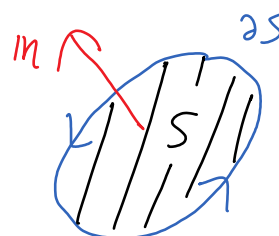
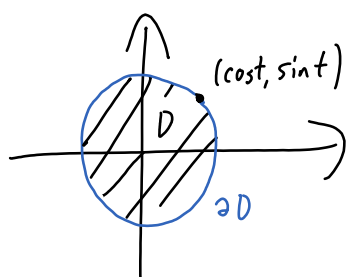
Ex Låt S vara delen av planet $z=2x$ där $(x,y) \in D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$, med orientering i pos. z -riktning.

Verifiera Stokes sats för $\mathbf{F} = \langle -y, x, 5z \rangle$

Kan parametrisera S med $\mathbf{r}(x,y) = \langle x, y, 2x \rangle$, $(x,y) \in D$.

Randen ∂D till D kan parametriseras med $\langle \cos t, \sin t \rangle$, $0 \leq t \leq 2\pi$, så ∂S kan parametriseras med

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{r}(\underbrace{\cos t}_x, \underbrace{\sin t}_y) = \langle \underbrace{\cos t}_x, \underbrace{\sin t}_y, \underbrace{2\cos t}_{2x} \rangle, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$



Parametriseringen $\mathbf{q}$ av ∂S ger moturs kring m , så positivt orienterad!

Stokes sats: $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$

a) Beräknar VL: $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{q}(t)) \cdot \mathbf{q}'(t) dt$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \langle -\sin t, \cos t, 5 \cdot 2 \cos t \rangle \cdot \langle -\sin t, \cos t, -2 \sin t \rangle dt = \\
&= \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{=1} - \underbrace{20 \cos t \sin t}_{=10 \sin(2t)} dt = \left[t + 5 \cos(2t) \right]_0^{2\pi} = 2\pi.
\end{aligned}$$

b) Beräknar HL:

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 5z \end{vmatrix} = \langle 0, 0, 2 \rangle$$

Om S par. av $r(x,y)$ (och orienteringen av S pekar i riktningen $r_x \times r_y$)
 är $dS = r_x \times r_y dA$.

$$r_x \times r_y = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \langle -2, 0, 1 \rangle \quad \left(\begin{array}{l} \text{pekar i pos. } z\text{-riktning,} \\ \text{som orienteringen av } S \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
\text{så} \quad \iint_S \text{rot } F \cdot dS &= \iint_D \text{rot } F \cdot |r_x \times r_y| dA = \iint_D \langle 0, 0, 2 \rangle \cdot \langle -2, 0, 1 \rangle dA = \\
&= 2 \iint_D dA = 2 \text{ area}(D) = 2\pi
\end{aligned}$$

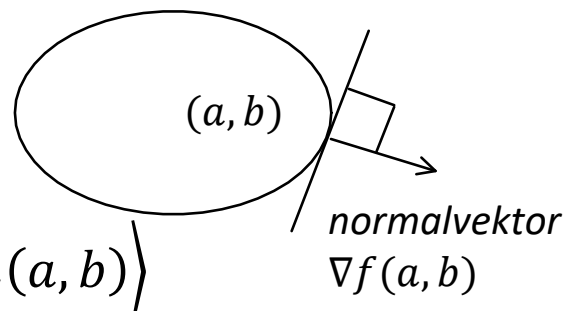
Samma svar 2π i a) och b), som bör vara.

Repetition

Reellvärda funktioner av två variabler

$f(x, y)$ funktion

$f(x, y) = k$
nivåkurva



Gradient $\nabla f(a, b) = \langle f_x(a, b), f_y(a, b) \rangle$

Tangentlinje till nivåkurvan

$$\nabla f(a, b) \cdot \langle x - a, y - b \rangle = 0$$

Riktungsderivata i riktning $\mathbf{u}$ ($|\mathbf{u}| = 1$):

$$D_{\mathbf{u}}f(a, b) = \nabla f(a, b) \cdot \mathbf{u}$$

Riktning där **växer som mest**

$$\mathbf{u} = \frac{\nabla f(a, b)}{|\nabla f(a, b)|}$$

(om $\nabla f(a, b) \neq 0$)

Har motsvarigheter i tre variabler, $f(x, y, z)$ funktion

Gradient $\nabla f(a, b, c) = \langle f_x(a, b, c), f_y(a, b, c), f_z(a, b, c) \rangle$

$\{(x, y, z) \mid f(x, y, z) = k\}$, **nivåyta**

Tangentplan till nivåytan i (a, b, c)

$$\nabla f(a, b, c) \cdot \langle x - a, y - b, z - c \rangle = 0$$

Riktungsderivata i riktning $\mathbf{u}$ ($|\mathbf{u}| = 1$):

$$D_{\mathbf{u}}f(a, b, c) = \nabla f(a, b, c) \cdot \mathbf{u}$$

$f(x, y)$ kan visualiseras med sin graf $z = f(x, y)$.

Tangentplan till grafen av en funktion $f(x, y)$ i en punkt (a, b)

$$z = \underbrace{f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)}_{=L(x, y)}$$

z -värdet $L(x, y)$ kallas **lineariseringen** av f kring (a, b) och om f är deriverbar kan den användas för att approximera f nära (a, b) .

Grafen $z = f(x, y)$ är en nivåyta $F(x, y, z) = 0$ för $F(x, y, z) = z - f(x, y)$ och tangentplanet till grafen av f = tangentplanet till nivåytan av F

Tenta 2014-08-21 7/

Beräkna tangentplanet till nivåytan

$$e^y \arctan(xy) + (z-1)e^z = 0$$

i punkten $(0, 1, 1)$.

Nivåytan ges av $F(x, y, z) = 0$, där

$$F(x, y, z) = e^y \arctan(xy) + (z-1)e^z.$$

Är inte på formen graf till funktion: $z = f(x, y)$.

Kan inte heller lätt skriva om till den formen.

Bör använda formeln för tangentplan till nivåyta.

(För $z = f(x, y)$ kan däremot alltid använda formeln för tangentplan till nivåytan $F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$)

$$F_x = e^y \frac{1}{1+(xy)^2} \cdot y, \quad F_x(0, 1, 1) = e$$

$\left(\frac{d}{dt} \arctan t = \frac{1}{1+t^2}\right)$

$$F_y = e^y \arctan(xy) + e^y \frac{1}{1+(xy)^2} x \quad F_y(0, 1, 1) = 0$$

$$F_z = e^z + (z-1)e^z = ze^z \quad F_z(0, 1, 1) = e$$

$$\text{så } \nabla F(0, 1, 1) = \langle e, 0, e \rangle$$

Tangentplanet blir då

$$\nabla F(0, 1, 1) \cdot \langle x-0, y-1, z-1 \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow e(x-0) + 0 \cdot (y-1) + e(z-1) = 0$$

$$\left(\Leftrightarrow x + z = 1 \right)$$

Kedjeregeln i två variabel (enklaste varianten)

Om $z = f(x, y)$ och $x = g(t)$ och $y = h(t)$ är deriverbara är

$$\frac{d}{dt} f(g(t), h(t)) = f_x(g(t), h(t))g'(t) + f_y(g(t), h(t))h'(t)$$

alt:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

2019-01-07 4) Låt $h(s, t) = f(1 + \sin(s-t), \arctan(s))$, där $f(u, v)$

är en deriverbar funktion s.a.

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= 9, & f_u(0, 0) &= 8, & f_v(0, 0) &= 7, \\ f(1, 0) &= 6, & f_u(1, 0) &= 5, & f_v(1, 0) &= 4. \end{aligned}$$

Beräkna $h_t(0, 0)$ (hoppa över beräkna $h_s(0, 0)$)

Låt $x(s, t) = 1 + \sin(s-t)$ $y(s, t) = \arctan(s)$.

Då är $h(s, t) = f(x(s, t), y(s, t))$.

Om $u = x(s, t)$ och $v = y(s, t)$ är då enl. kedjeregeln:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t}$$

Om skriver ut variablerna:

$$h_t(s, t) = f_u(x(s, t), y(s, t)) x_t(s, t) + f_v(x(s, t), y(s, t)) y_t(s, t)$$

$$x(0,0) = 1, \quad y(0,0) = 0$$

$$x_t(s,t) = \cos(s-t) \cdot (-1) \quad x_t(0,0) = -1$$

$$y_t(s,t) = 0 \quad y_t(0,0) = 0$$

$$h_t(0,0) = f_u(1,0) \cdot (-1) + f_v(1,0) \cdot 0 = -5.$$

Gränsvärden

$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$ om "*f(x,y) hur nära L som helst så länge (x,y) är tillräckligt nära (a,b)*"

Strategier för att beräkna gränsvärden:

- Om funktion är sammansättning av elementära funktioner och *är definierad* (dvs. delar inte med 0 eller liknande), så är den kontinuerlig, och kan därför sätta in $(x,y) = (a,b)$

Exempel $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \sin\left(\frac{\pi x^2}{y}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

- Förkorta/förenkla så hamnar i förra fallet.

Tenta 2017-10-23 2a)

$$\begin{aligned}
 & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2} \\
 &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 + y^2) (\sqrt{x^2 + y^2 + 4} + 2)}{(\sqrt{x^2 + y^2 + 4})^2 - 2^2} \\
 &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 + y^2) (\sqrt{x^2 + y^2 + 4} + 2)}{x^2 + y^2} = \\
 &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2 + 4} + 2 = \sqrt{4} + 2 = 4
 \end{aligned}$$

- Försök skriva det som en sammansättning med en funktion av en variabel.

Exempel $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^4)}{x^2 + y^4}$

$$\frac{\sin(x^2 + y^4)}{x^2 + y^4} = h(f(x, y)) \text{ där } h(t) = \frac{\sin(t)}{t} \text{ och } f(x, y) = x^2 + y^4$$

Eftersom $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ och

$$\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 1$$

(standardgränsv. alt. l'Hospital, alt def. av derivata för $\sin t$ i $t = 0$)

$$\text{så } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^4)}{x^2 + y^4} = 0.$$

- *Instängningsregeln*: Om

$$f(x, y) \leq g(x, y) \leq h(x, y)$$

och

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} h(x, y)$$

så är

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y) = L$$